

# Diseño de Filtros Digitales (Parte 2)

- Filtros FIR
  - ◆ Secuencias Simétricas
  - ◆ Técnicas de Diseño de Filtros FIR
    - ◆ Método de las Series de Fourier
    - ◆ Método de Muestreo en Frecuencia
    - ◆ Métodos Iterativos basados en condiciones óptimas
  - ◆ Diseño de Filtros FIR con MATLAB

## Secuencias Simétricas

- ❑ El diseño de filtros FIR requieren la selección de la secuencia que mejor representa la respuesta a impulso de un filtro ideal.
- ❑ Los filtros FIR son siempre estables y son capaces de tener una respuesta de fase que es lineal, lo que equivale a decir que su respuesta tiene un retraso constante.
- ❑ El mayor problema de los filtros FIR es que para unas especificaciones dadas requieren un filtro de orden mucho mayor que los filtros IIR.
- ❑ Un filtro FIR de longitud  $M$  con entrada  $x[n]$  y salida  $y[n]$  se describe mediante la ecuación diferencia:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_{M-1}x[n-M+1] = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x[n-k]$$

donde  $b_k$  son los coeficientes del filtro.

## Secuencias Simétricas

- Por otra parte podemos expresar la salida del filtro  $y[n]$  como una convolución de la entrada  $x[n]$  con la respuesta a impulso del filtro  $h[n]$ :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] \cdot x[n-k]$$

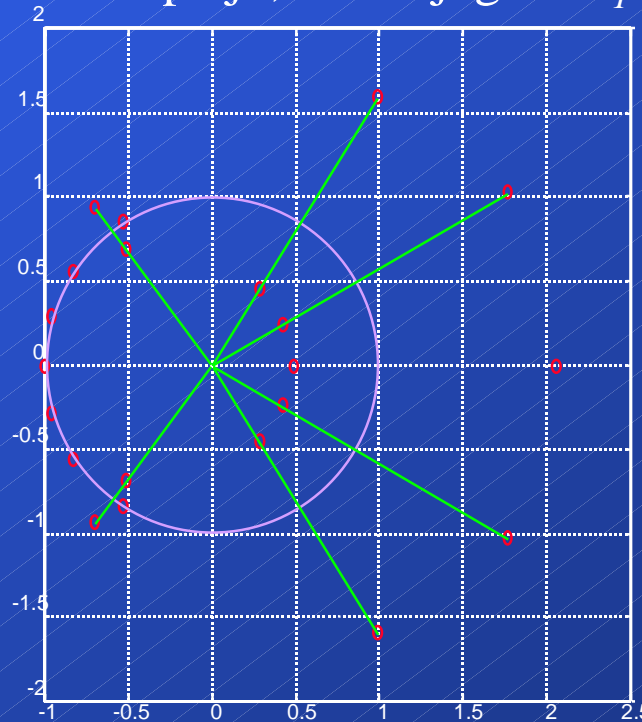
- Ya que estas dos ecuaciones son idénticas, y por tanto, los coeficientes  $b_k = h[k]$ .
- Se puede demostrar que la respuesta de un filtro FIR es de fase lineal si los coeficientes  $h[n]$  cumplen :  $h[n] = \pm h[M-1-n]$   $n = 0, 1, \dots, M-1$   
Es decir los coeficientes tienen algún tipo de simetría.
- La función de Transferencia Z del filtro FIR, aplicando esta condición es :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] \cdot z^{-k} = h[0] + h[1] \cdot z^{-1} + h[2] \cdot z^{-2} + \dots + h[M-2] \cdot z^{-(M-2)} + h[M-1] \cdot z^{-(M-1)} =$$

$$= \begin{cases} z^{-(M-1)/2} \left\{ h \left[ \frac{M-1}{2} \right] + \sum_{k=0}^{(M-3)/2} h[k] \left[ z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2} \right] \right\} & M \text{ impar} \\ z^{-(M-1)/2} \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k] \left[ z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2} \right] & M \text{ par} \end{cases}$$

# Secuencias Simétricas

- De esta última expresión se deduce que  $z^{-(M-1)}H(z^{-1}) = \pm H(z)$  lo que significa que las raíces de  $H(z)$  son las mismas que las de  $H(z^{-1})$ . Es decir las raíces (en este caso, los ceros) ocurren en pares recíprocos. Si  $z_1$  es un cero de  $H(z)$ ,  $1/z_1$  es también un cero.
- Además, si  $z_1$  es un cero complejo, su conjugado  $z_1^*$  es también un cero, así como  $1/z_1^*$ .



# Secuencias Simétricas

- La longitud  $N$  de una secuencia simétrica puede ser par o impar. Esto significa que el punto medio cae en un punto de la secuencia si  $N$  es impar y entre dos puntos si  $N$  es par. Como tengo dos tipos de simetría (par o impar), tendré cuatro posibles tipos de secuencias simétricas, las cuales se muestran en la Tabla 1 junto con la DTFT de cada secuencia.

<b>Secuencias Simétricas</b>					
<i><math>L=1/2(N-1)</math>, <math>M=1/2N</math>, <math>F</math> es la frecuencia digital=<math>f/f_s</math>, donde <math>f_s</math> es la frecuencia de muestreo</i>					
<i>Tipo</i>	<i>Simetría</i>	<i>N</i>	<i>H(F)</i>	<i> H(0) </i>	<i> H(1/2) </i>
1	Par	Impar	$h[0] + 2 \sum_{k=1}^L h[k] \cos(2k\pi F)$	$h[0] + 2 \sum_{k=1}^L h[k]$	$h[0] + 2 \sum_{k=1}^L (-1)^k h[k]$
2	Par	Par	$2 \sum_{k=1}^M h[k] \cos [2\pi F (k - \frac{1}{2})]$	$2 \sum_{k=1}^L h[k]$	0
3	Impar	Impar	$-j2 \sum_{k=1}^L h[k] \sin(2k\pi F)$	0	0
4	Impar	Par	$-j2 \sum_{k=1}^M h[k] \sin [2\pi F (k - \frac{1}{2})]$	0	$-2 \sum_{k=1}^M (-1)^k h[k]$

Tabla 1: Secuencias Simétricas

## Secuencias Simétricas

- De esta tabla se pueden sacar las siguientes conclusiones acerca de la aplicabilidad de cada una de los tipos de secuencia.
  - ◆ Para las secuencias del tipo 2 ( $|H(\pi/2)|=0$ ), por lo que sólo pueden ser utilizadas para filtros pasabaja y pasabanda.
  - ◆ Las secuencias del tipo 3 ( $|H(0)|=0=|H(\pi/2)|$ ) sólo pueden ser utilizadas para filtros pasabanda.
  - ◆ Las secuencias tipo 4 ( $|H(0)|=0$ ) son apropiadas para filtros pasaalta y pasabanda.
  - ◆ La secuencia tipo 1 puede implementar cualquier tipo de filtro. Es el único tipo capaz de realizar filtros parabanda.

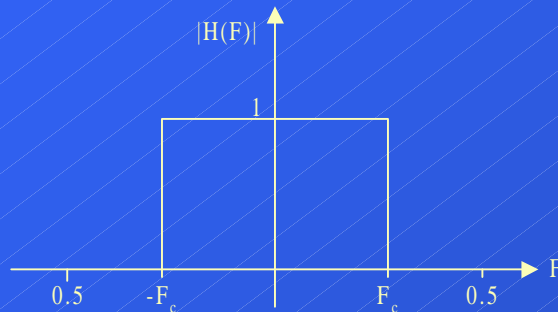
<b>Aplicaciones de las Secuencias Simétricas</b>		
<i>Tipo</i>	$ H(F) $	<i>Aplicación</i>
1		<i>Todo tipo de filtros</i>
2	$ H(\pi/2)=0 $	<i>Sólo LP y BP</i>
3	$ H(0) =0= H(\pi/2) $	<i>Sólo BP</i>
4	$ H(0)=0 $	<i>Sólo HP y BP</i>

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

- Hay tres métodos de diseño de filtros FIR:
  - ◆ Método de las Series de Fourier.
  - ◆ Método del Muestreo en Frecuencia.
  - ◆ Métodos Iterativos basados en condiciones óptimas de diseño.
- Método de las Series de Fourier
  - ◆ El método se basa en seleccionar la respuesta a impulso  $h_N[n]$  como una versión truncada de la respuesta a impulso  $h[n]$  de un filtro ideal con respuesta frecuencial  $H(F)$ .
  - ◆ Proceso de Diseño de Filtros FIR por este método:
    - ◆ Normalización de frecuencias por la frecuencia de muestreo.
    - ◆ Conversión de especificaciones a la de un Prototipo de Filtro Pasobajo.
    - ◆ Truncamiento de la respuesta a impulso de un filtro ideal  $h[n]=2F_C \text{sinc}(2nF_C)$  a  $h_N[n]$  de longitud  $N$ . El orden del filtro es  $N-1$ .
    - ◆ Seleccionar una ventana  $w[n]$  de  $N$  puntos para obtener  $h_w[n]=h_N[n] \cdot w[n]$ .
    - ◆ Convertir del Prototipo de Filtro Pasobajo al Filtro deseado  $h_F[n]$ .
    - ◆ Retrasar  $h_F[n]$  para asegurarse que el filtro es causal.

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

- Nos planteamos realizar un filtro pasabajo ideal (digital) con una frecuencia de corte  $F_c$ , tal y como indica la figura.



Si expresamos matemáticamente la respuesta frecuencial deseada:

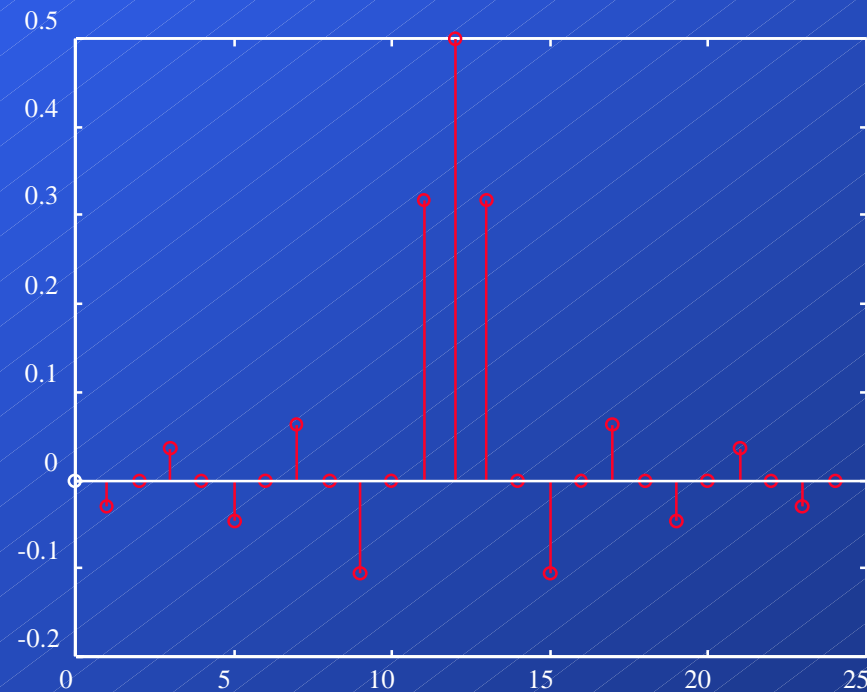
$$H_d(F) = \begin{cases} e^{-j2\pi F(N-1)/2} & |F| \leq F_c \\ 0 & |F| > F_c \end{cases}$$

Haciendo la Transformada inversa de Fourier discreta en el tiempo de esta función  $H_d(F)$ , nos queda:

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{F_s} \int_{-1/2}^{1/2} H_d(F) \cdot e^{j2\pi F n} dF = \int_{-F_c}^{F_c} e^{-j2\pi F \left(\frac{N-1}{2} - n\right)} dF = \frac{1}{-j2\pi \left(\frac{N-1}{2} - n\right)} \left[ e^{-j2\pi F \left(\frac{N-1}{2} - n\right)} \right]_{-F_c}^{F_c} = \\ &= \frac{-2j}{-j2\pi \left(\frac{N-1}{2} - n\right)} \cdot \sin \left[ 2\pi F_c \left(\frac{N-1}{2} - n\right) \right] = 2F_c \frac{\sin \left[ 2\pi F_c \left(\frac{N-1}{2} - n\right) \right]}{2\pi F_c \left(\frac{N-1}{2} - n\right)} = \\ &= 2F_c \operatorname{sinc} \left[ 2F_c \left(\frac{N-1}{2} - n\right) \right] \end{aligned}$$

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

- La función  $\text{sinc}(x)$  está definida para todo valor de  $x$ , y además decae muy lentamente. Utilizar los valores de  $h[n]$  definidos por la ecuación anterior como coeficientes del filtro FIR, dará lugar a sobreimpulsos en la respuesta frecuencial del filtro. Debido a la lentitud de la función  $\text{sinc}(x)$ , necesitaré un filtro de elevado orden (gran número de puntos) para diseñar filtros con transiciones rápidas entre bandas.



# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

- ◆ Necesidad de utilizar ventanas espectrales : El truncamiento de  $h[n]$  equivale a multiplicar  $h[n]$  por una ventana rectangular  $w[n]$  de longitud  $N$ . El espectro de  $h_N[n]=h[n] \cdot w[n]$  es la convolución de  $H(F)$  y  $W(F)$ . La función  $W(F)$  va a producir rizados y sobreimpulsos en la señal de salida, de la misma forma que se producía el efecto Gibbs al reconstruir una señal discontinua con un número finito de coeficientes espectrales. Aquí el efecto Gibbs se da en el dominio frecuencial al usar un truncamiento de la respuesta a impulso. Para reducir los efectos de un truncamiento abrupto se utilizan ventanas espectrales que tienden a suavizar esos efectos.
- ◆ Por ejemplo, en el caso de una ventana rectangular, en la que  $w[n]=1$ , para  $n=0, \dots, N-1$ , la DTFT es,

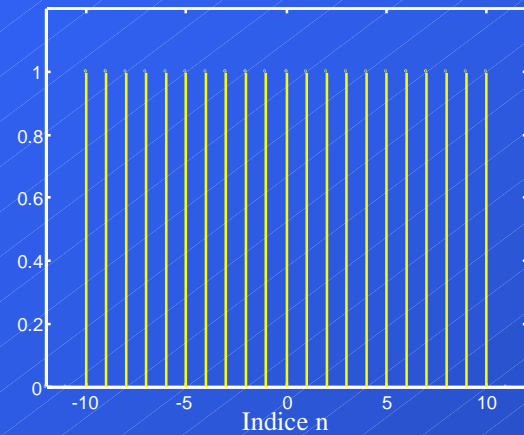
$$\begin{aligned}
 W(F) &= \sum_{k=0}^{N-1} w[k] \cdot e^{-j2\pi Fk} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi Fk} = \sum_{k=0}^{N-1} \left( e^{j2\pi F} \right)^{-k} = \frac{1 - e^{-j2\pi FN}}{1 - e^{-j2\pi F}} = \\
 &= \frac{e^{-j2\pi FN/2}}{e^{-j2\pi F/2}} \cdot \frac{e^{j2\pi FN/2} - e^{-j2\pi FN/2}}{e^{j2\pi F/2} - e^{-j2\pi F/2}} = e^{-j2\pi F(N-1)/2} \cdot \frac{\sin(\pi FN)}{\sin(\pi F)}
 \end{aligned}$$

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

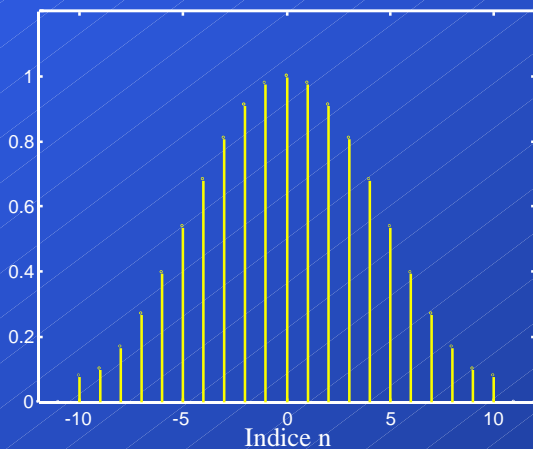
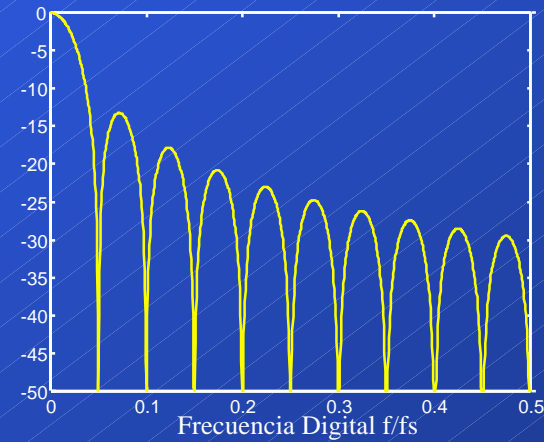
- ◆ El módulo de esta función (llamada función de Dirichlet) se muestra en la figura de la página siguiente.
- ◆ Las ventanas más comunmente utilizadas en el diseño de filtros FIR están listadas en la Tabla 2. Sus características espectrales principales se especifican en la Tabla 3.
- ◆ De los espectros de las ventanas se hacen notar dos cosas:
  - ◆ El ancho del lóbulo principal y el de transición decrece al aumentar  $N$ .
  - ◆ La amplitud de los lóbulos de los lados permanece constante con  $N$ .
- ◆ Idealmente el espectro de una ventana debe estar confinado en el lóbulo principal, sin casi energía en los lóbulos de los lados.

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

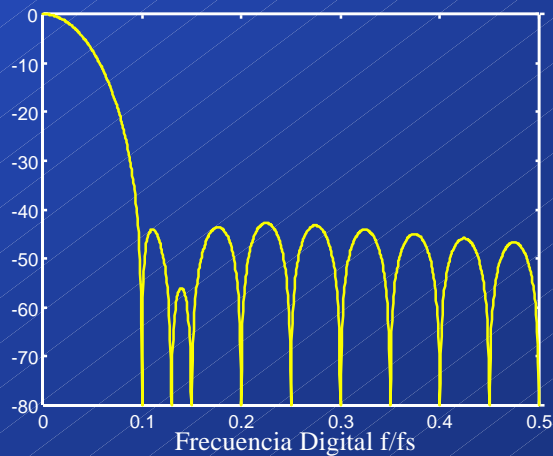
- ◆ A continuación se muestran algunas ventanas espectrales y sus espectros



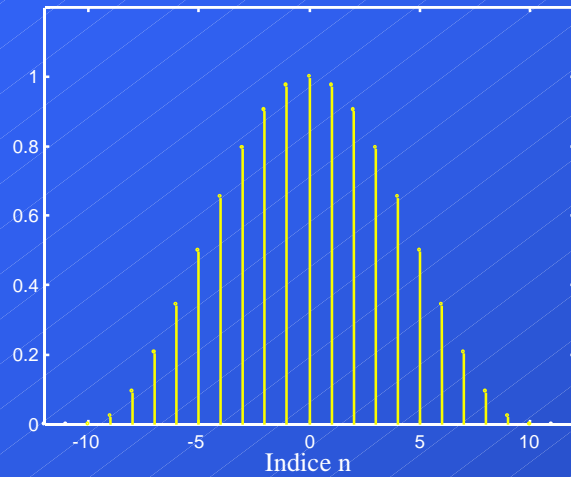
Boxcar



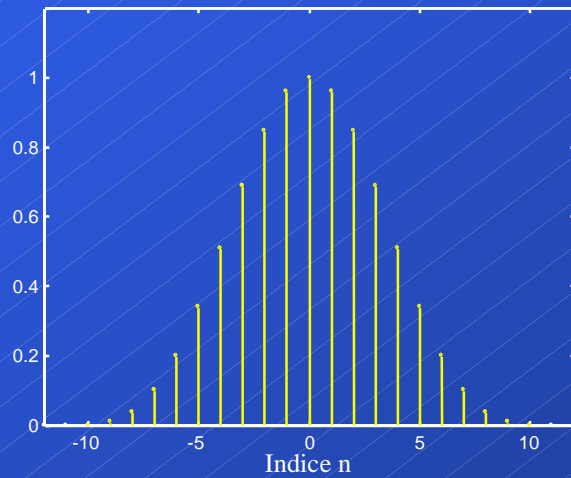
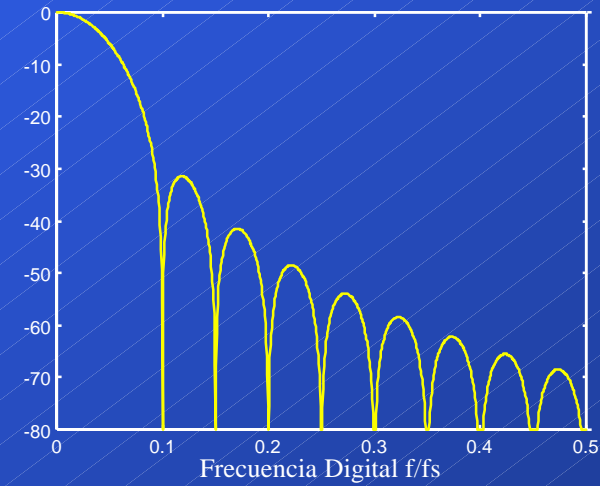
Hamming



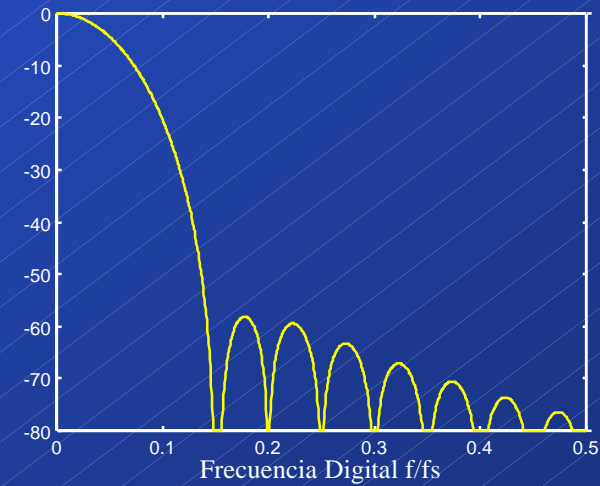
# Técnicas de Diseño de Filtros FIR



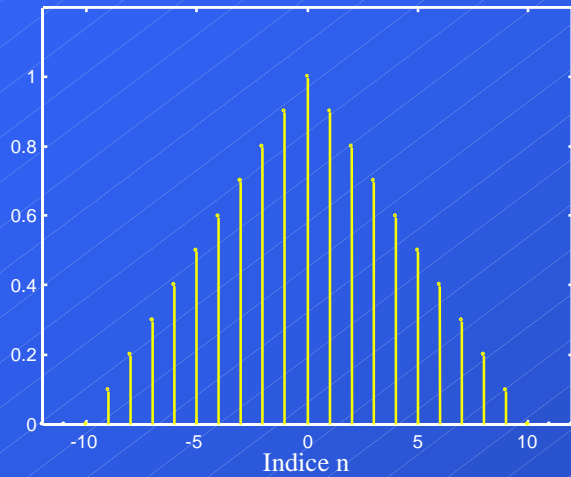
vonHann



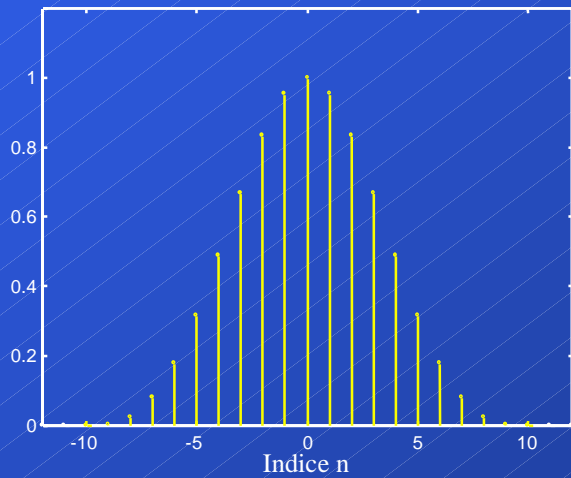
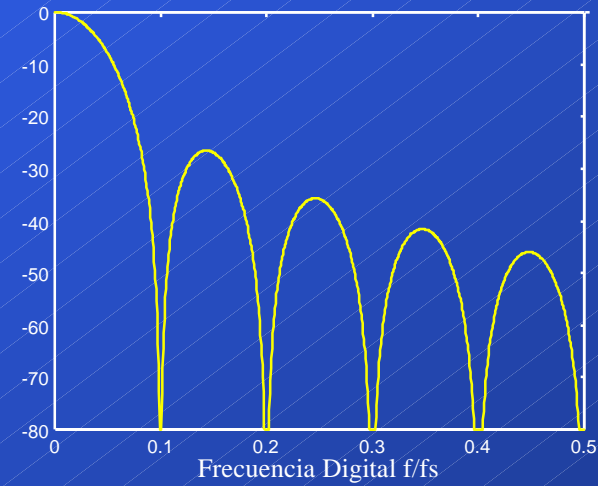
Blackman



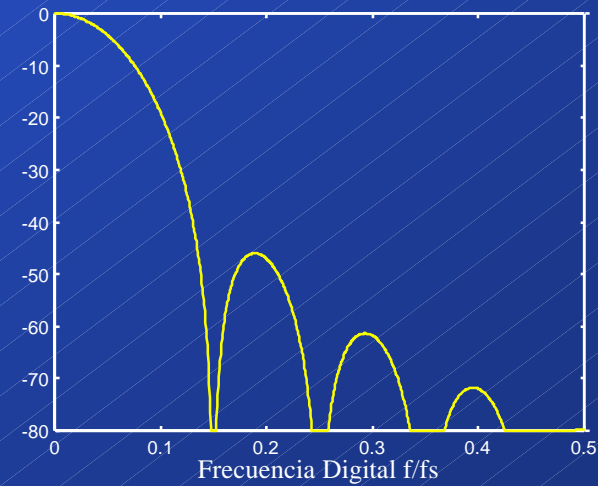
# Técnicas de Diseño de Filtros FIR



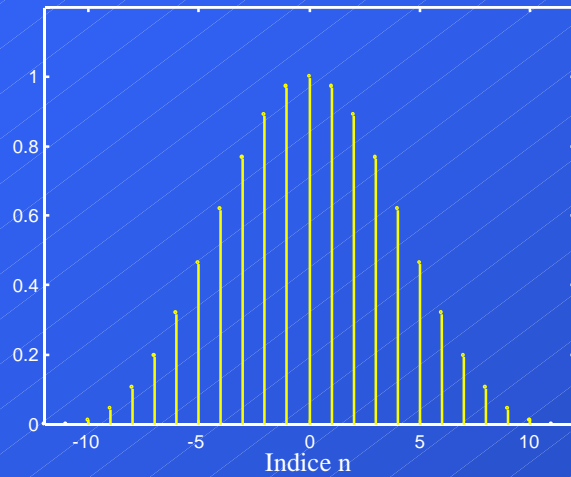
Bartlett



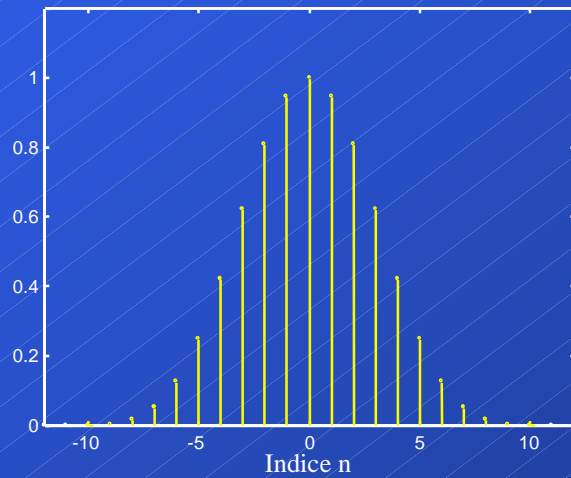
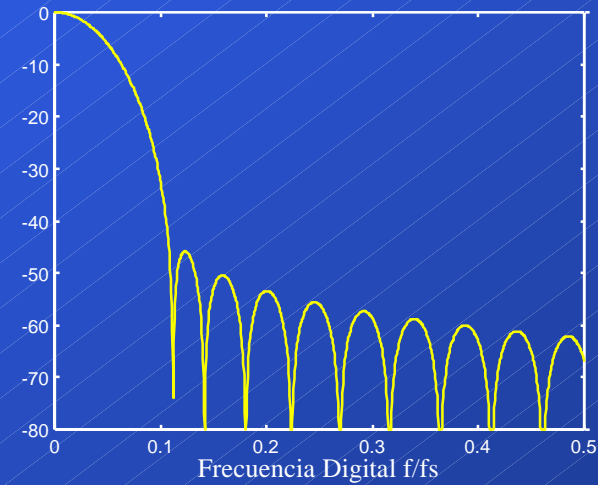
Papoulis



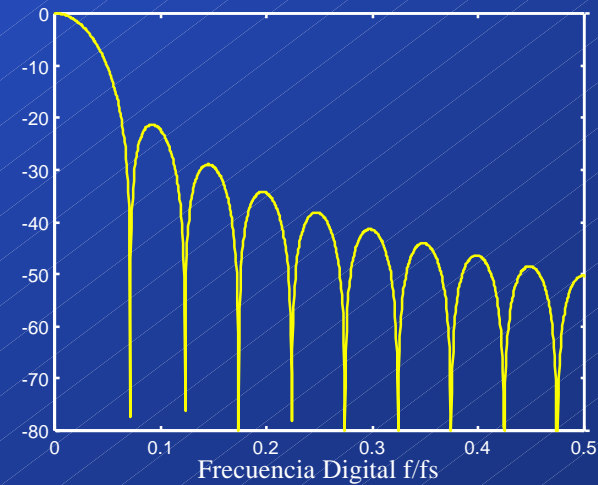
# Técnicas de Diseño de Filtros FIR



Kaiser  
 $\beta=2$



Parzen-2



# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

- ◆ Las ventanas más utilizadas son vonHann, Hamming y Kaiser.
- ◆ A la hora de escoger la ventana adecuada tendremos un cuenta dos criterios principales de diseño :
  - 1 Asegurarse que el parámetro  $P_s$  de la ventana esté por encima de la atenuación  $A_s$  especificada para la parabanda del filtro. Como mucho puede estar unos 8 dB por encima. Es decir  $P_s \geq A_s - 8$ .
  - 2 Una transición más ancha permite utilizar un filtro de menor orden, pero a costa de una menor atenuación en los lóbulos.
- ◆ Ejemplo: Diseñar un filtro FIR pasobajo con una frecuencia de corte de 5KHz y una frecuencia de muestreo de 20KHz.

$$h_N[n] = 2F_c \text{sinc}(2nF_c) = 2 \cdot (5/20) \cdot \text{sinc}(2n5/20) = 0.5 \cdot \text{sinc}(0.5n).$$

(a) Con  $N=9$ ,  $-4 \leq n \leq 4$ , y una ventana tipo Bartlett :

$$w[n] = 1 - \frac{2|n|}{N-1} \rightarrow \{w[n]\} = \frac{1}{4} \{0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0\}$$

$$\{h_N[n]\} = \{0, -0.10610, 0.31830, 0.5, 0.31830, -0.10610\}$$

$$\{h_w[n]\} = \{h_N[n]w[n]\} = \{0, -0.02650, 0.23870, 0.5, 0.23870, -0.02650\}$$

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

Para que el filtro sea causal tendremos que retrasar 4 muestreos, por lo que el filtro a aplicar es:

$$\begin{aligned} H(z) &= 0 - 0.0265z^{-1} + 0 + 0.2387z^{-3} + 0.5z^{-4} + 0.2387z^{-5} + 0 - 0.0265z^{-7} + 0 = \\ &= -0.0265z^{-1} + 0.2387z^{-3} + 0.5z^{-4} + 0.2387z^{-5} - 0.0265z^{-7} \end{aligned}$$

Como el primer muestreo de  $h_w[n]=0$ , podemos hacer

$$H(z) = -0.0265 + 0.2387z^{-2} + 0.5z^{-3} + 0.2387z^{-4} - 0.0265z^{-6}$$

(b) Con  $N=6$ ,  $-2.5 \leq n \leq 2.5$  y una ventana vonHann

$$w[n] = 0.5 + 0.5 \cos[2n\pi/(N-1)]$$

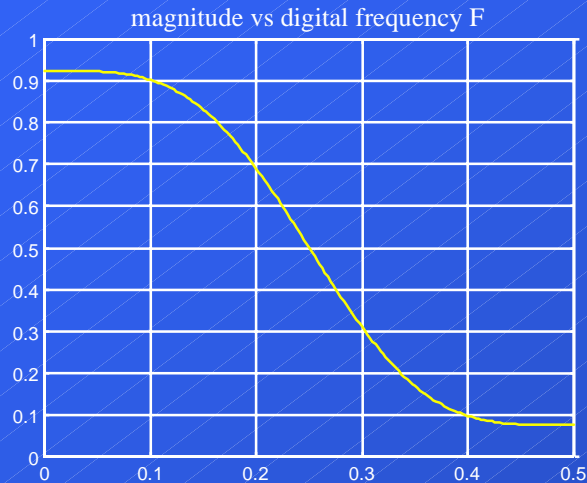
$$\{w[n]\} = \{0, 0.3455, 0.9045, 0.9045, 0.3455, 0\}$$

$$\{h_N[n]\} = \{-0.09, 0.1501, 0.4502, 0.4502, 0.1501, -0.09\}$$

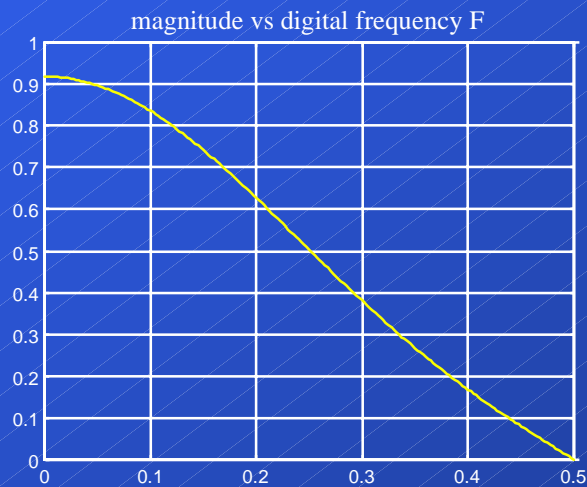
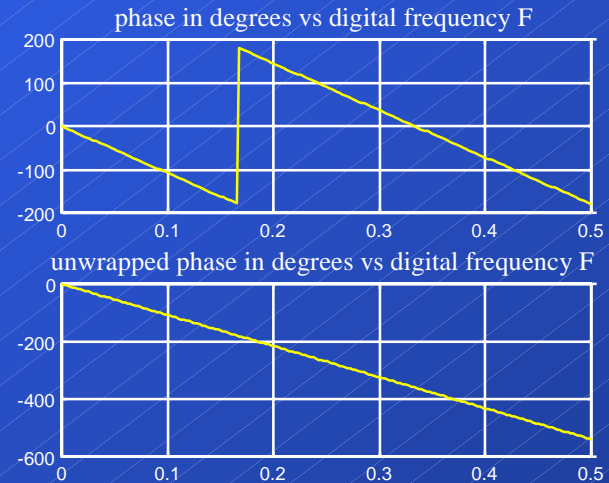
$$\{h_w[n]\} = \{h_N[n]w[n]\} = \{0, 0.0518, 0.4072, 0.4072, 0.0518, 0\}$$

$$H(z) = 0.0518 + 0.4072z^{-1} + 0.4072z^{-2} + 0.0518z^{-3}$$

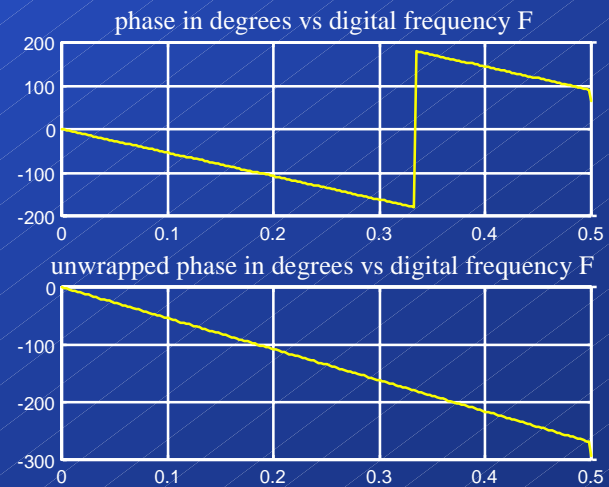
# Técnicas de Diseño de Filtros FIR



*Bartlett*  
 $N=9$



*vonHann*  
 $N=6$



# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

Características de algunas ventanas espectrales

<i>Window</i>	<i>Atenuación en lóbulo de los lados (dB)</i>	<i>Ancho de Banda de la Transición</i>	<i>Máximo Rizado en Parabanda (dB)</i>
<i>Rectangular</i>	-13	$2\pi 0.9/N$	-21
<i>Hanning</i>	-31	$2\pi 3.1/N$	-44
<i>Hamming</i>	-41	$2\pi 3.3/N$	-53
<i>Blackman</i>	-57	$2\pi 5.5/N$	-74

Características de la ventana Kaiser para distintos parámetros

<i>Parámetro <math>\beta</math></i>	<i>Atenuación en lóbulo de los lados (dB)</i>	<i>Ancho de Banda de la Transición</i>	<i>Máximo Rizado en Parabanda (dB)</i>
<i>2.0</i>	-19	$2\pi 1.5/N$	-29
<i>3.0</i>	-24	$2\pi 2.0/N$	-37
<i>4.0</i>	-30	$2\pi 2.6/N$	-45
<i>5.0</i>	-37	$2\pi 3.2/N$	-54
<i>6.0</i>	-44	$2\pi 3.8/N$	-63
<i>7.0</i>	-51	$2\pi 4.5/N$	-72
<i>8.0</i>	-59	$2\pi 5.1/N$	-81
<i>9.0</i>	-67	$2\pi 5.7/N$	-90
<i>10.0</i>	-74	$2\pi 6.4/N$	-99

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

- Podemos estimar la longitud del filtro ( $N$ ) a partir del ancho de banda en la transición ( $\Delta\omega$ ). Por ejemplo, si se pide un filtro con una transición entre  $\omega_p$  y  $\omega_s$ , llamamos banda de transición a la diferencia normalizada por la frecuencia de muestreo  $F_m$ , entre las frecuencias de parabanda y pasabanda (en  $rad/s$ ),

$$\Delta\omega = \frac{(\omega_s - \omega_p)}{F_m} = \frac{2\pi k}{N} \Rightarrow N \approx \frac{2\pi k}{\Delta\omega} = \frac{k}{\Delta F}$$

- Para el caso de un filtro de Kaiser hay que calcular la longitud del filtro y el valor del parámetro  $\beta$ . Esto se realiza mediante las siguientes ecuaciones,

$$N \approx \frac{A_s - 7.95}{14.36 \cdot \Delta F}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102 \cdot (A_s - 8.7), & A_s \geq 50 \\ 0.5842 \cdot (A_s - 21)^{0.4} + 0.07886 \cdot (A_s - 21), & 20 < A_s < 50 \end{cases}$$

## Técnicas de Diseño de Filtros FIR

- ◆ Otro criterio es tomar  $N$  de acuerdo a la siguiente fórmula, donde  $W_s$  es la mitad de la anchura del lóbulo principal (Tabla 2), y  $F_p$  y  $F_s$  la frecuencias digitales de pasabanda y parabanda.
 
$$N \approx \frac{W_s}{(F_s - F_p)}$$
- ◆ Transformaciones Espectrales : Se trata de convertir diseños de filtros pasobajo a otras formas y viceversa. Las tablas 1 y 2 del apéndice muestran todas las posibles transformaciones.

Ejemplo : Diseñar un filtro pasobajo con las siguientes especificaciones  $f_p=1\text{KHz}$ ,  $f_s=2\text{KHz}$ ,  $S_f=10\text{KHz}$ ,  $A_p=2\text{ dB}$  y  $A_s=40\text{dB}$ .

- ◆ Las frecuencias digitales son  $F_p=f_p/S_f=0.1$ ,  $F_s=f_s/S_f=0.2$ . Aplicando este último criterio y acudiendo a las tablas vemos que de acuerdo a los valores de  $P_s$ , los filtros más adecuados son vonHann, Hamming y Blackman. Aplicando la fórmula de  $N$  para cada uno de estos filtros obtenemos,

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

vonHann :  $N = 1.87/0.1 \approx 19$

Hamming :  $N = 1.91/0.1 \approx 20$

Blackman :  $N = 2.82/0.1 \approx 29$

A partir de aquí procedemos por el científico método de intentar y errar. De la Tabla 1, obtenemos  $h_N[n]$  para una frecuencia de corte que no se nos especifica claramente. Sólo se nos da las frecuencias en los bordes de la pasabanda y la parabanda. Por ello escogemos una frecuencia de corte un 20% superior a  $f_p$ , es decir  $f_C = 1.2 \text{ KHz}$ .

$$h_N[n] = 2F_C \text{sinc}(2nF_C) = 0.24 \text{sinc}(0.24n)$$

Ahora se intenta con cada uno de los filtros partiendo de la longitud calculada y se observa si se cumplen las especificaciones. En caso de no cumplirse, debe aumentarse el orden del filtro o modificar la frecuencia de corte elegida y volver comprobar las especificaciones. Este proceso ha sido utilizado en este problema y hemos llegado a los siguientes resultados:

vonHann:  $N=23$   $F_C=0.137$   $A_p=1.9 \text{ dB}$   $A_s=40 \text{ dB}$

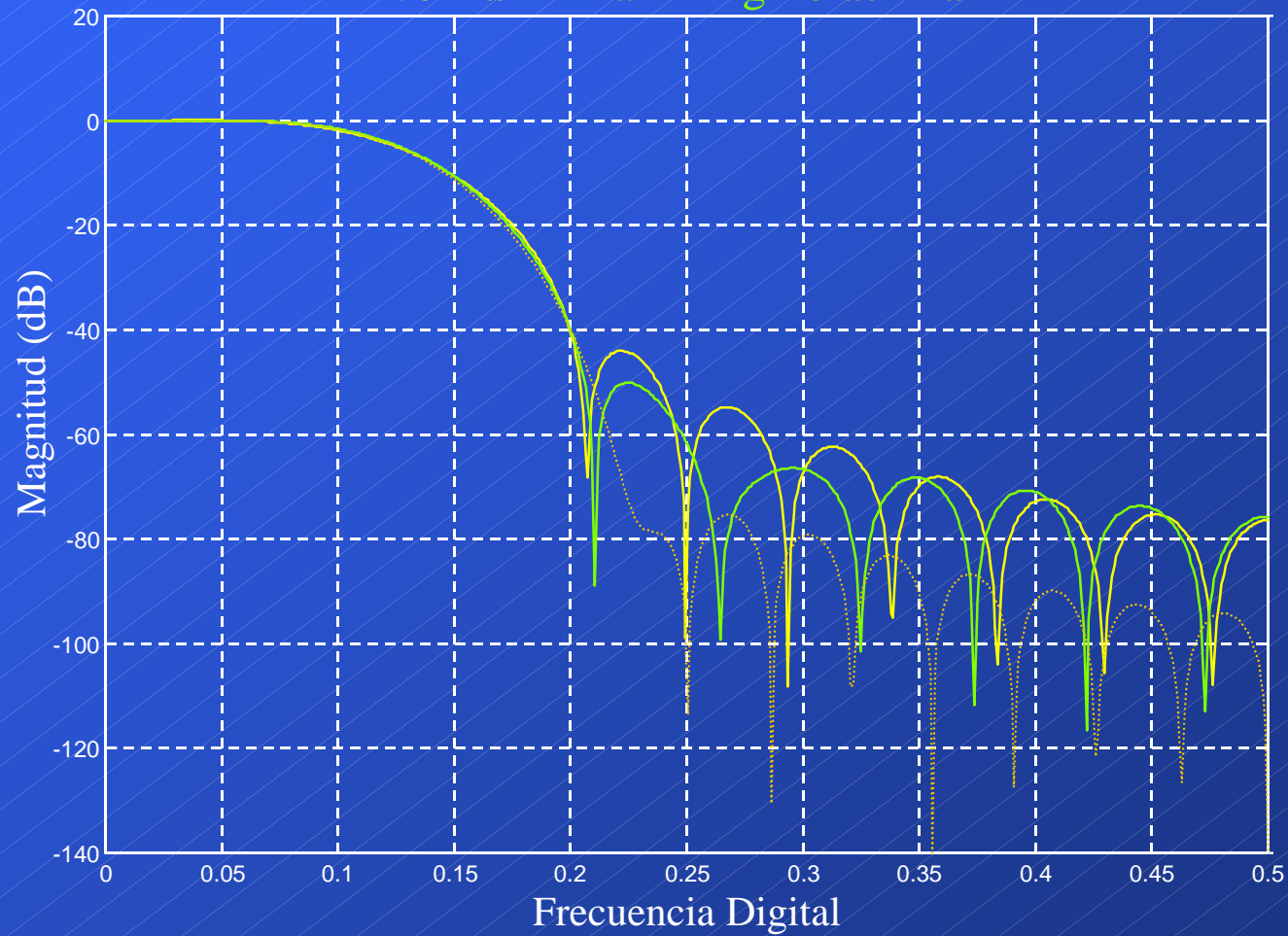
Hamming:  $N=23$   $F_C=0.132$   $A_p=1.58 \text{ dB}$   $A_s=40.1 \text{ dB}$

Blackman:  $N=29$   $F_C=0.128$   $A_p=1.98 \text{ dB}$   $A_s=40.1 \text{ dB}$

El filtro Blackman tiene la mayor longitud y un mayor ancho de transición pero el nivel de los lóbulos de los lados es el menor.

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

vonhann - hamming - blackman



## Técnicas de Diseño de Filtros FIR

Ejemplo : Diseñar un filtro pasabanda con las siguientes especificaciones:

Pasabanda  $[4,8]KHz$ , Parabanada  $[2,12]KHz$   $A_p=3dB$   $A_s=45dB$   $S_F=25KHz$

Calculamos primero la frecuencia central  $f_0=6KHz$ . Para hacer que la Parabanada tenga una frecuencia central igual a la Pasabanda por lo que cambiamos la frecuencia de  $12KHz$  por una frecuencia de  $10KHz$ . Normalizamos las frecuencias y aplicamos las fórmulas de la Tabla 2, para pasarlo al prototipo pasobajo :

$$PasaBanda[0.16,0.32] \ ParaBanda[0.08,0.4] \ F_0=0.24$$

$$F_p=(F_{p2}-F_{p1})/2=0.08 \ F_s=(F_{s2}-F_{s1})/2=0.16$$

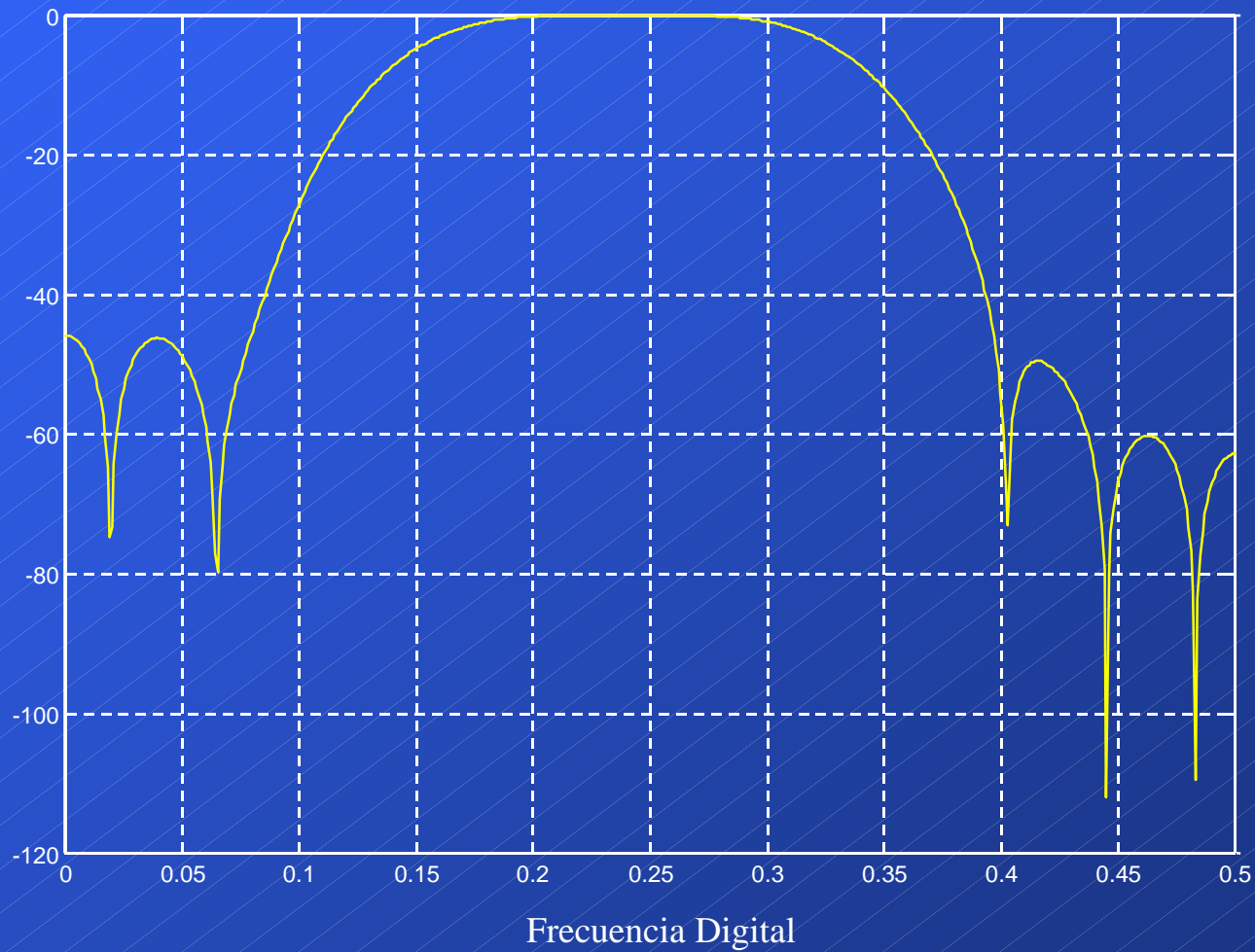
Utilizamos el filtro de Hamming, para el que  $N \approx W_s/(F_s-F_p) \approx 24$  y comenzamos el proceso de intentar y errar hasta que llegamos a una solución aceptable. Una vez determinada la secuencia  $h_w[n]$  que especifica el filtro, lo convertimos a un filtro pasabanda a través de la relación de la Tabla 1:

$$h_{BP}[n]=2\cos(2\pi nF_0) \cdot h_w[n]=2\cos(0.48\pi n) \cdot h_w[n].$$

El resultado final obtenido es un filtro con  $N=27$ ,  $F_c=0.0956$ ,  $A_p=3.01dB$  a  $4 KHz$  y  $8 KHz$ ,  $A_s=45.01dB$  a  $2KHz$  y  $73.47 dB$  a  $12 KHz$ .

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

Filtro Pasabanda usando una ventana de Hamming



## Técnicas de Diseño de Filtros FIR

- ◆ Filtros FIR de Media Banda : Veamos qué sucede si diseñamos un filtro pasabaja en el que la frecuencia de corte es  $F_c=0.25$ . La respuesta a impulso es  $h[n]=2F_c \text{sinc}(2nF_c)=0.5\text{sinc}(0.5n)$ , de forma que si el orden  $N$  es impar,  $h[n]=0$  para  $n$  par (ver ejemplo T11). En este caso la frecuencia de muestreo debe ser  $S_F=4f_c$  (o  $4f_0$ ). La función de Transferencia  $H(F)$  tiene antisimetría respecto a  $F=0.25$  :

$$H(F)=1-H(0.25-F)$$

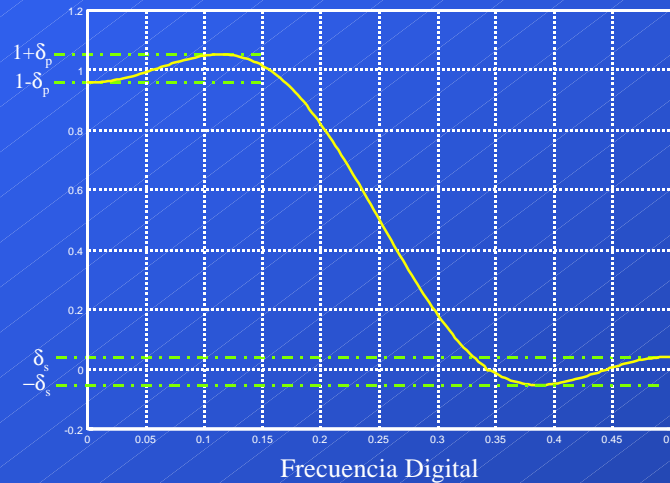
Filtros de Media Banda usando la ventana Kaiser : Para esta ventana con  $N=9$  y  $\beta=0.5$ ,

$w[n]=\{0.5818,0.7497,0.8838,0.9702,1,0.9702,0.8838,0.7497,0.5818\}$ ,  
y  $h_N[n] \cdot w[n]=\{0,-0.0795,0,0.3088,0.5,0.3088,0,-0.0795,0\}=h_w[n]$ .

$$H(z)=-0.0795+0.3088z^{-2}+0.5z^{-3}+0.3088z^{-4}-0.0795z^{-6}.$$

Este tipo de filtros con la ventana Kaiser muestra un rizado tanto en la pasabanda ( $\delta_p$ ) como en la parabanda ( $\delta_s$ ). Estos dependerán de las atenuaciones especificadas en las dos bandas. Con estos datos se diseña la ventana Kaiser con el parámetro  $\beta$  más adecuado.

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR



Dos importantes características de los filtros de media banda son :

- ❖ Su implementación requiere sólo de aprox.  $N/2$  multiplicadores debido a los ceros de los coeficientes del filtro.
- ❖ Se puede obtener un filtro pasoalto a partir del espectro complementario :

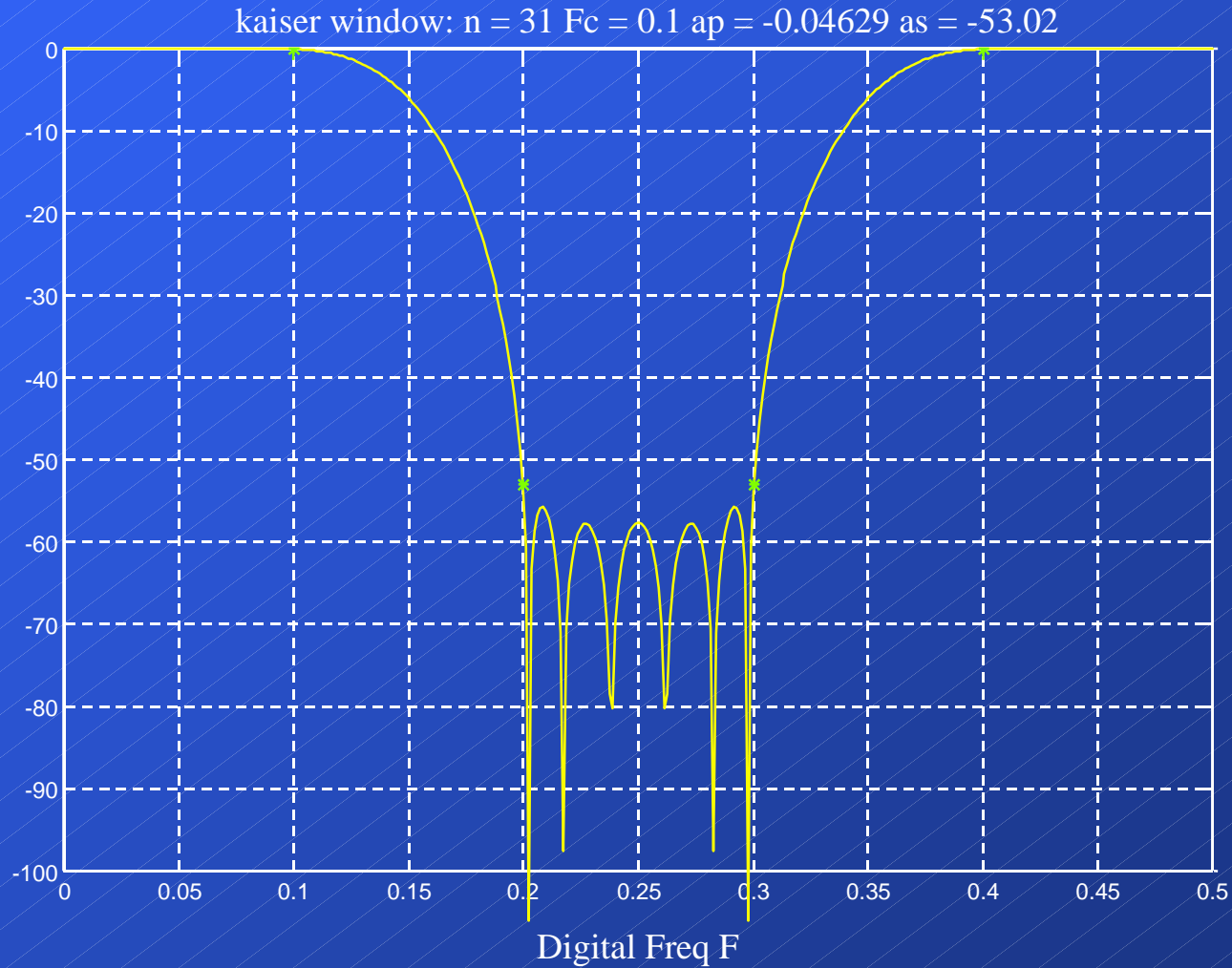
$$H_{HP}(z) = z^{-(N-1)/2} H_{co}(z).$$

## Técnicas de Diseño de Filtros FIR

Ejemplo : Diseñar un filtro parabanda de media banda con las siguientes especificaciones : Parabanda [2 KHz-3 KHz], Pasabanda [1 KHz-4 KHz],  $A_p=1dB$  y  $A_s=50dB$ .

- ♦ Calculamos la frecuencia de muestreo necesaria para realizar el filtro.  
 $S_F=4f_0=4(3+2)/2=10 \text{ KHz}$ .
- ♦ Ahora se determinan las frecuencias digitales  $F_p$  y  $F_s$  de acuerdo con la Tabla 2, diseñándose un prototipo de filtro pasabaja.
- ♦ Una vez obtenido se transforma a un filtro parabanda con las expresiones de la Tabla 1. El resultado final para un filtro de este tipo con una ventana Kaiser es :  $N=31$ ,  $A_p=0.046 \text{ dB}$  a 2 KHz y 3 KHz y  $A_s=53.02 \text{ dB}$  a 1 y 4 KHz.
- ♦ Los pasos a realizar no se muestran explícitamente puesto que este tipo de diseño se realiza de forma automática por métodos de CAD. En concreto, haremos estos diseños utilizando MATLAB. Especificaremos el tipo de filtro a realizar (pasobajo, pasoalto, etc), la frecuencia de muestreo, las frecuencias de pasabanda y parabanda y sus respectivas atenuaciones, así como el tipo de ventana que deseamos utilizar. Con estos datos el programa realiza el diseño del filtro proporcionando el orden, los coeficientes y las especificaciones reales del filtro.

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR



# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

## □ Método del Muestreo Frecuencial

- ◆ Se trata de reconstruir el espectro continuo  $X(F)$  de una señal discreta a partir de los muestreos de la función  $X(F)$ . El espectro reconstruido  $X_N(F)$  será igual a  $X(F)$  sólo en las frecuencias de muestreo.
- ◆ Se puede considerar el DFT de la señal  $h_N[n]$  de longitud  $N$  como  $N$  muestreos de su DTFT ( $H(F)$ ) en  $F=k/N$ ,  $k=0,1,\dots,N-1$ .

$$H_N(F) = \int_0^1 h_N[n] \exp(j2\pi n F) dF \qquad H_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h_N[n] \exp(-j2\pi n k/N)$$

La respuesta a impulso  $h_N[n]$  se calcula con el IDFT,

$$h_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_N[k] \exp(j2\pi n k/N)$$

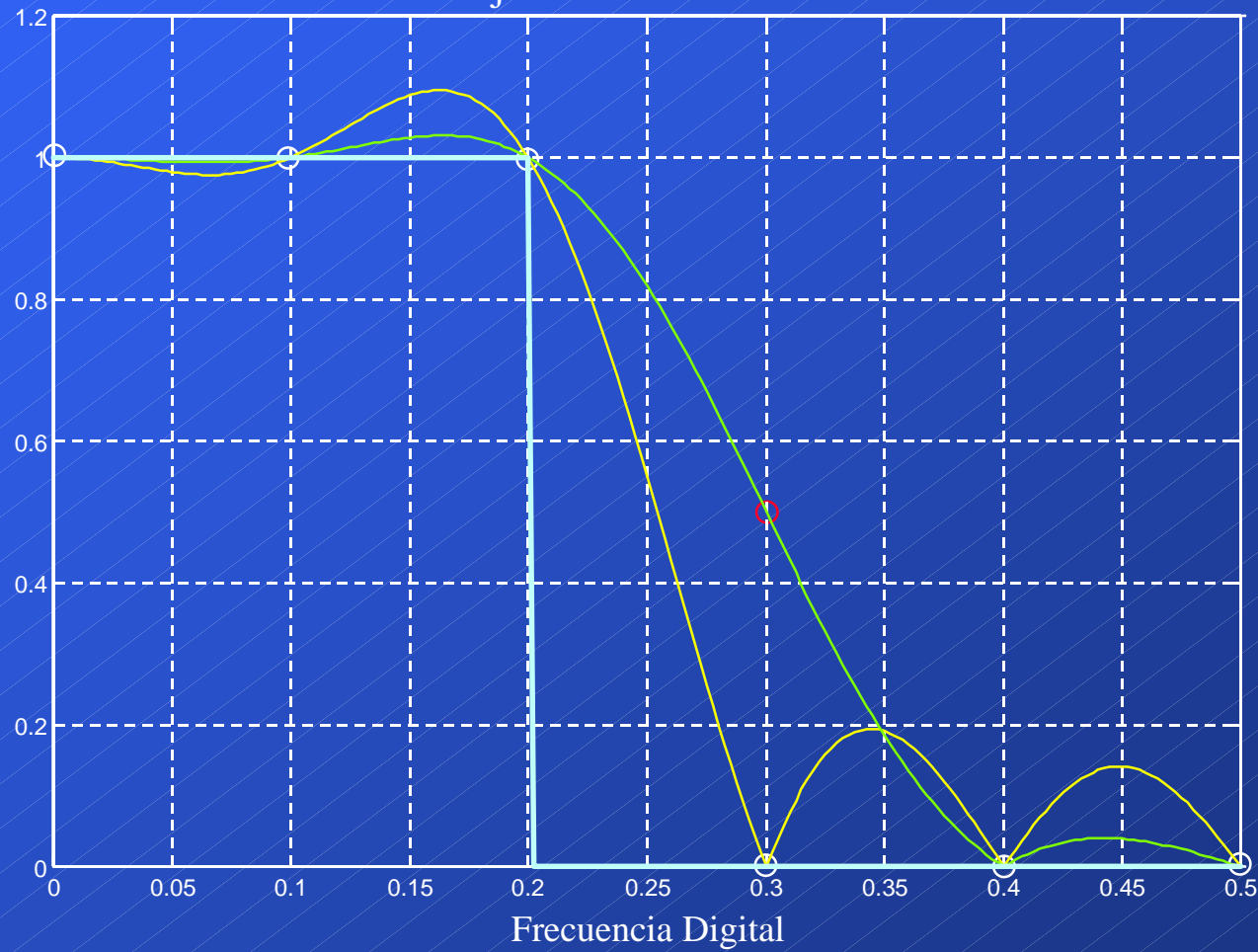
- ◆ Proceso de diseño
  - ◆ Los muestreos deben hacerse en un periodo (0,1) de la extensión periódica de  $H(F)$ .
  - ◆ La fase de  $H(F)$  es lineal y por tanto cada uno de los muestreos tiene una fase dada por  $\phi(k) = -\pi k(N-1)/N$ ,  $k=1,\dots,N$ .

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

- ❖ Para minimizar el efecto Gibbs en las discontinuidades, permitimos que los valores de muestreo varíen lentamente en las discontinuidades.
- ❖ Ejemplo : Diseñar un filtro pasabajo dado por la respuesta frecuencial de la figura.
- ❖ Tomamos 10 muestras. La fase de cada una de las muestras es  $-\pi k(N-1)/N$ 
  - $H[0]=1$   $H[1]=\exp(-j0.9\pi)$   $H[2]=\exp(-j1.8\pi)$   $H[3]=0$   $H[4]=0$   $H[5]=0$ .
  - $H[1]=-0.9511-j0.3090$   $H[2]=0.8090+j0.5878$ .
  - Los valores  $H[5] \dots H[9]$  se calculan teniendo en cuenta que la respuesta frecuencial debe ser simétrica en módulo y asimétrica en fase:  $H[6]=0$   
 $H[7]=0$   $H[8]=0.8090-j0.5878$   $H[9]=-0.9511+j0.3090$ .
  - Haciendo la IDFT de estos  $H[k]$  obtenemos la secuencia  $h[n]$ ,  
 $h[n]=\{0.0716,-0.0794,-0.1,0.1558,0.452,0.452,0.1558,-0.1,-0.0794,0.0716\}$
  - En la respuesta frecuencial de este filtro se observa que efectivamente pasa por los puntos de muestreo pero a costa de un sobreimpulso. Para suavizarlo, se puede sustituir los muestreos  $H[3]$  por  $0.5\exp(-j2.7\pi)$ . Haciendo el IDFT de la nueva secuencia de muestreos  $H[k]$  obtenemos el filtro,  
 $h[n]=\{0.0128,0.0157,-0.1,0.0606,0.5108,0.5108,0.0606,-0.1,0.0157,0.0128\}$

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

Filtro Pasobajo usando Muestreo Frecuencial



# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

- ◆ Podemos combinar las ventajas del diseño con ventanas estudiado anteriormente y el método de muestreo frecuencial para tener un método de diseño de filtros de respuesta frecuencial arbitraria.
- ◆ Se muestrea la respuesta frecuencial deseada con un número alto de puntos ( $M=512$ ). Hacemos el IDFT y obtenemos la respuesta  $h[n]$ .
  - ◆  $h[n]$  es demasiado largo, así que debemos truncarlo a una secuencia más pequeña con una ventana.
  - ◆ Si el diseño no cumple las especificaciones podemos cambiar  $N$ , el ancho de pasabanda o ajustar los muestreos en la zona de transición.
- Métodos Basados en criterios de optimización
  - ◆ Se trata de utilizar criterios para minimizar el máximo error en la aproximación. Hay tres importantes conceptos en diseño óptimo,
  - ◆ El error entre la aprox.  $H(F)$  y la respuesta deseada  $D(F)$  debe tener igual rizado.

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

- ♦ La respuesta frecuencial  $H(F)$  de un filtro cuya respuesta a impulso  $h[n]$  es una secuencia simétrica puede ponerse como

$$H(F) = \sum_{k=0}^M \alpha_k(F) \cos(2\pi k F)$$

donde  $M$  está relacionado con la longitud del filtro  $N$ . Esta forma es un polinomio de Chebyshev. Debemos escoger  $\alpha_n$  para que el diseño se óptimo.

- ♦ El teorema de la alternancia ofrece una pista para seleccionar  $\alpha_n$ .
- ♦ El Teorema de la Alternancia : Aproximamos  $D(F)$  por una forma polinomial de Chebyshev obteniendo  $H(F)$ . Se define el error ponderado en la aproximación  $\epsilon(F)$  como  $\epsilon(F) = W(F)[D(F) - H(F)]$   
El teorema dice que se pueden encontrar al menos  $M+2$  frecuencias  $F_k$ ,  $k=1,2,\dots,M+2$  llamadas frecuencias extremas donde

- ♦ El error varía entre dos máximos y mínimos iguales

$$\epsilon(F_k) = -\epsilon(F_{k+1}) \quad k=1,2,\dots,M+1$$

- ♦ El error en la frecuencia  $F_k$  es igual al máximo error absoluto.

$$|\epsilon(F_k)| = |\epsilon(F)|_{\max} \quad k=1,2,\dots,M+2$$

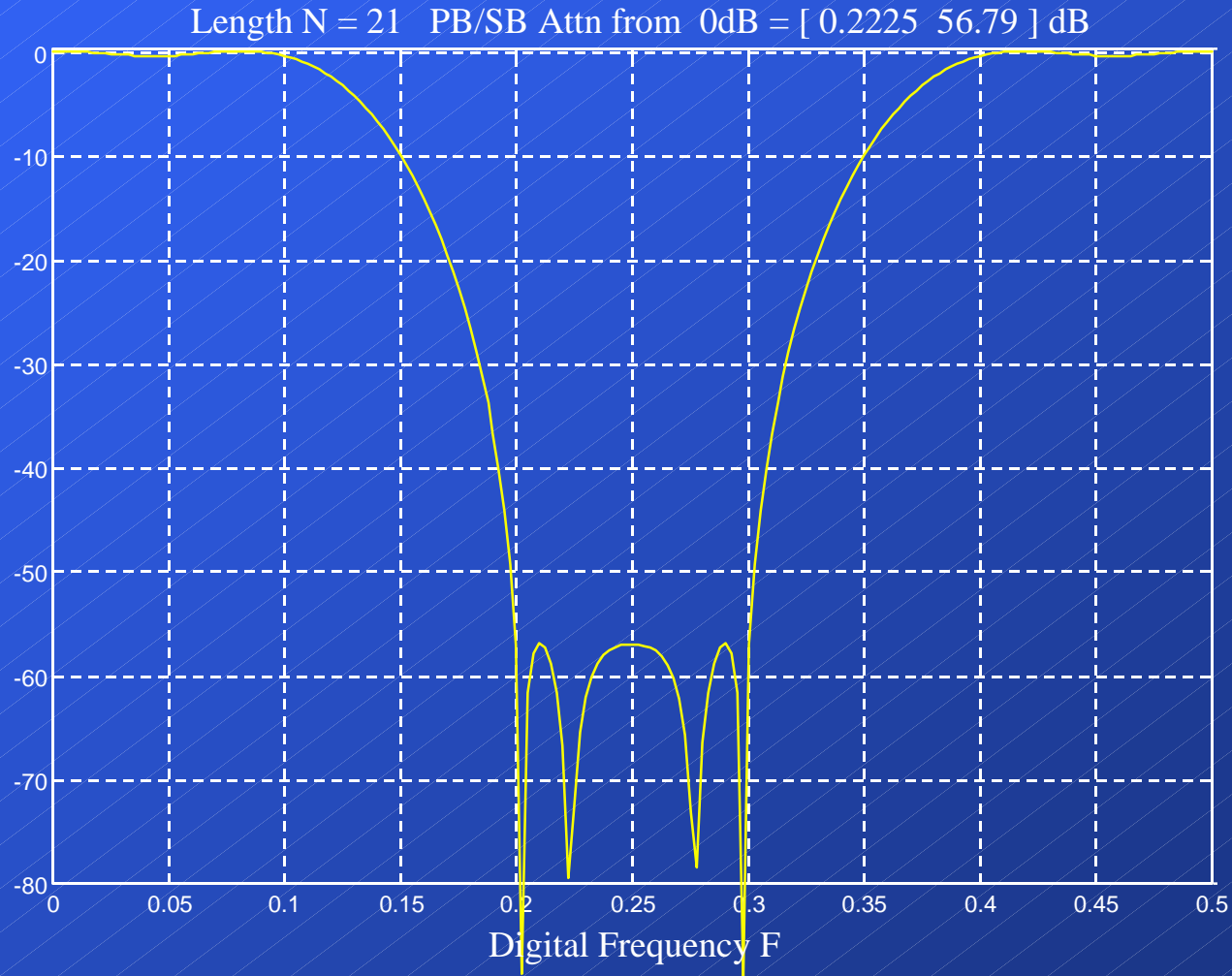
## Técnicas de Diseño de Filtros FIR

Existe un algoritmo llamado Parks-McClellan (PM) para determinar esas frecuencias. Este algoritmo necesita los siguientes datos: las frecuencias  $F_p$  y  $F_s$ , la relación  $\delta_1/\delta_2$  de los errores en la pasabanda y en la parabanda y la longitud  $N$  del filtro. Devuelve los coeficientes  $\alpha_n$  y los valores reales de  $\delta_1$  y  $\delta_2$ .

El filtro parabanda diseñado anteriormente ha sido rediseñado utilizando este algoritmo. El resultado es un filtro de  $N=21$ ,  $\delta_1=0.2225dB$  y  $\delta_2=56.79 dB$ .

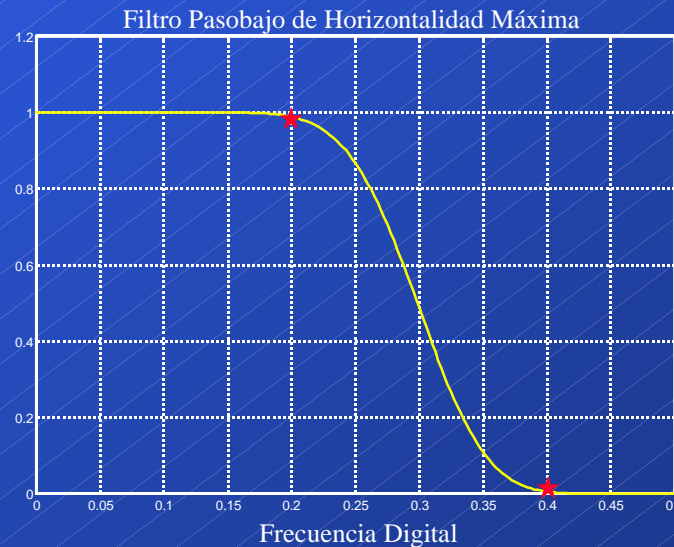
La respuesta frecuencial se muestra en la figura.

# Técnicas de Diseño de Filtros FIR



# Técnicas de Diseño de Filtros FIR

- ◆ Filtros FIR de horizontalidad máxima
  - ◆ Se trata de diseñar un filtro cuyas  $2L-1$  derivadas en  $F=0$  y sus  $2K-1$  derivadas en  $F=0.5$  sean cero. La longitud del filtro viene dada por  $N=2(K+L)-1$  y es por tanto impar. Los enteros  $K$  y  $L$  se determinan a partir de las frecuencias de pasabanda y parabanda que corresponden a atenuaciones de  $0.5 \text{ dB}$  y  $26 \text{ dB}$ .
  - ◆ Por ejemplo, se pide un filtro pasabajo cuyas frecuencias digitales  $F_p=0.2$  y  $F_s=0.4$ . Obtenemos un filtro de  $N=27$ .



# Diseño de Filtros FIR con MATLAB

## □ Funciones de MATLAB para realizar filtros FIR:

### ◆ Función FIR1

```
>> B = fir1(N,Wn,type>window);
```

Diseña un filtro FIR pasabajo de orden  $N$  (longitud  $N+1$ ) y frecuencia de corte  $Wn$  (normalizada con respecto a la frecuencia de Nyquists,  $0 \leq Wn \leq 1$ ). Se pueden especificar otro tipo de filtros de la misma forma que con los filtros IIR mediante el parámetro *type*. Por ejemplo, para un filtro parabanda:

```
>> B = fir1(N,[W1 W2],'stop');
```

Por defecto la función FIR usa la ventana de Hamming. Otro tipo de ventanas pueden también especificarse:

```
>> B = fir1(N,Wn,bartlett(N+1));
```

```
>> B = fir1(N,Wn,'high',chebwin(N+1,R));
```

### ◆ Función FIR2

```
>> B = fir2(N,F,M>window);
```

Diseña un filtro FIR utilizando el método del muestreo frecuencial. Los parámetros de entrada es el orden del filtro  $N$  (longitud  $N+1$ ) y dos vectores  $F$  y  $M$  que especifican la frecuencia y la magnitud, de forma que "plot(F,M)" es una gráfica de la respuesta deseada del filtro.

# Diseño de Filtros FIR con MATLAB

Se pueden indicar saltos bruscos en la respuesta frecuencial duplicando el valor de la frecuencia de corte.

$F$  debe estar entre 0 y 1, en orden creciente, siendo el primer elemento igual a 0 y el último 1. El parámetro *window* indica el tipo de ventana a utilizar. Por defecto, usa la ventana de Hamming.

```
>> B = fir2(N,F,M,'bartlett(N+1)');
```

Se pueden especificar más parámetros en esta función,

```
>> B = fir2(N,F,M,npt,lap>window);
```

La función *fir2* interpola la respuesta frecuencial deseada ( $F,M$ ) con *npt* puntos (por defecto, *npt*=512). Si dos valores sucesivos de  $F$  son iguales, se crea una región de *lap* puntos alrededor de este punto (por defecto, *lap*=25).

- ◆ Función FIRLS

```
>> B = firls(N,F,M);
```

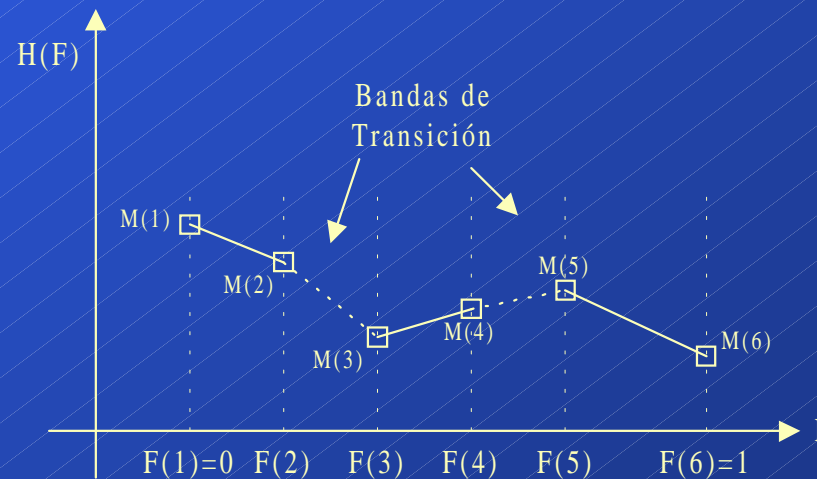
Diseño de filtros FIR usando la minimización del error por mínimos cuadrados. Los argumentos de entrada son el orden del filtro  $N$ , y dos vectores  $F$  y  $M$ , cuyo formato difiere de los análogos en la función *fir2*. El filtro obtenido es la mejor aproximación a  $(F,M)$  por mínimos cuadrados.

# Diseño de Filtros FIR con MATLAB

$F$  es un vector que indica los límites de las bandas de frecuencia en parejas (por tanto el tamaño de  $F$  debe ser par), y en orden ascendente entre 0 y 1.  $M$  es un vector del mismo tamaño que  $F$  que indica la magnitud deseada para cada banda de frecuencias. La respuesta deseada es la línea que conecta los puntos  $(F(k), M(k))$  y  $(F(k+1), M(k+1))$  para  $k$  impar. Las bandas de frecuencia entre  $F(k+1)$  y  $F(k+2)$  para  $k$  impar son tratadas por *firls* como bandas de transición.

También existe un argumento opcional que consiste en un vector  $W$  cuyo tamaño es la mitad de  $F$ .  $W$  es un factor de ponderación del error para cada banda de frecuencias.

```
>> B = firls(N,F,M,W);
```



# Diseño de Filtros FIR con MATLAB

- ♦ Algoritmo de Parks-McClellan

Hay dos funciones en MATLAB para realizar este algoritmo: *remezord* y *remez*.

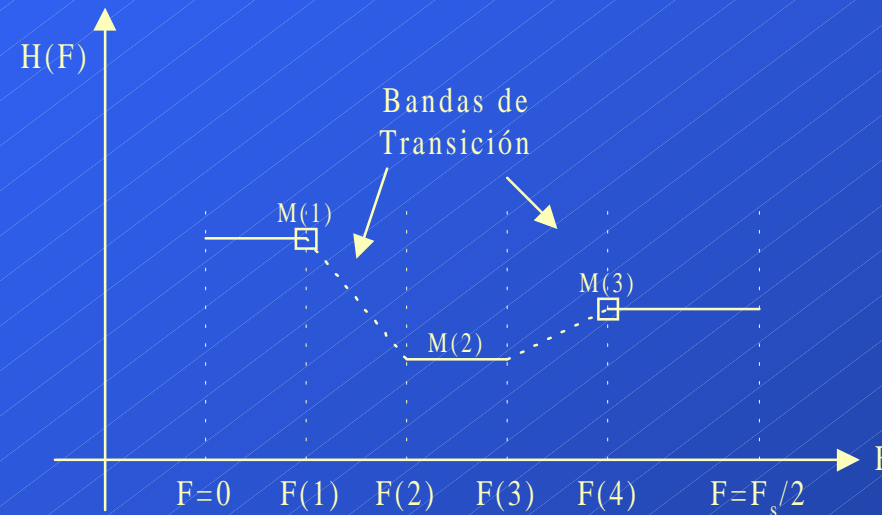
```
>> [N,Fo,Mo,W] = remezord(F,M,DEV,Fs)
```

Calcula el orden  $N$ , las bandas de frecuencia normalizadas  $Fo$ , las magnitudes en esas bandas  $Mo$  y los factores de ponderación  $W$  que luego serán utilizados como argumentos de entrada de la función *remez*. Estos valores cumplen las especificaciones dadas por  $F$ ,  $M$ ,  $DEV$ .  $F$  es un vector de frecuencias de corte en Hz, en orden ascendente entre 0 y  $Fs/2$ . Si no se especifica  $Fs$ ,  $Fs=2$  por defecto. El primer elemento de  $F$  es siempre 0 y el último es siempre  $Fs/2$ , pero no deben ser especificados en el vector  $F$ . El vector  $M$  indica la respuesta deseada en cada banda. Por tanto, el vector  $M$  tiene un tamaño igual a  $(length(F)+2)/2$ .  $DEV$  es un vector que indica el máximo rizado permitido en cada banda. Ver la gráfica de la página siguiente.

```
>> b = remez(N,Fo,Mo,W);
```

Con los valores obtenidos en la función *remezord*, podemos implementar el algoritmo de Parks-McClellan.  $Fo$  y  $Mo$  son dos vectores de igual magnitud.  $Fo(k)$  y  $Fo(k+1)$   $k$  impar especifica bandas de frecuencia y  $Mo(k)$  y  $Mo(k+1)$  la correspondiente magnitud para cada frecuencia. El filtro obtenido es la mejor aproximación por minimax.

# Diseño de Filtros FIR con MATLAB

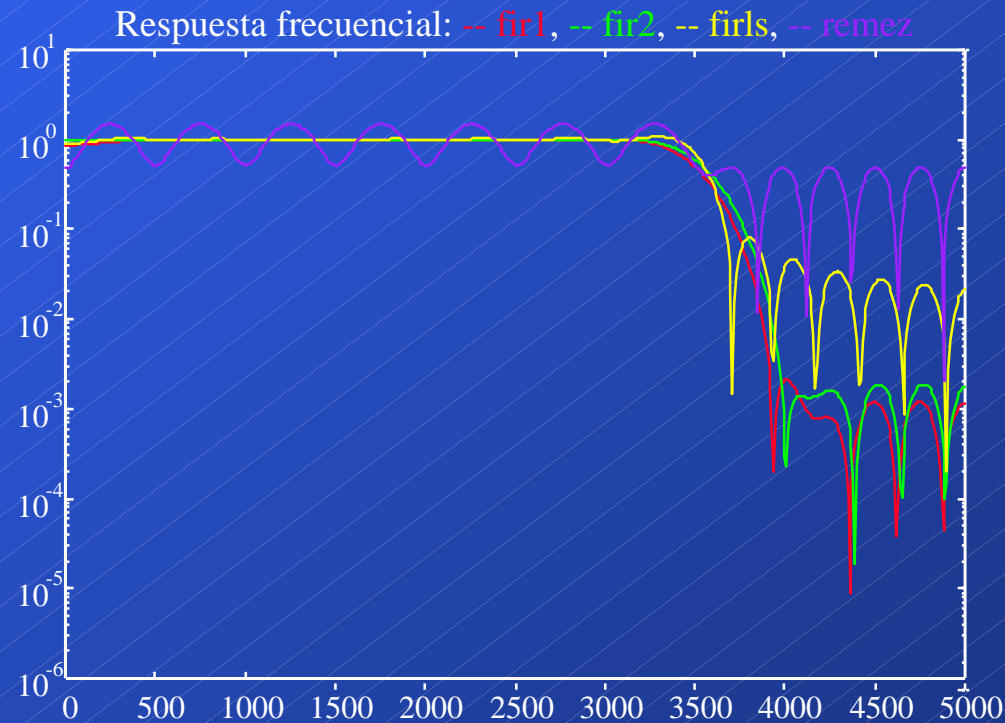


- ♦ Ejemplo 1: Diseñar un filtro FIR pasabanda a frecuencias de 30 Hz y 3500 Hz por cada uno de los diferentes métodos. Utilizar un mismo orden de filtro (por ejemplo  $N=44$ ) y comparar las respuestas frecuenciales.
- ♦ 

```
>> N=44;Fs=11020;Fny=Fs/2;
>> Bfir1 = fir1(N,[30 3500]/Fny);
>> Bfir2 = fir2(N,[0 10 30 3500 3600 Fny]/Fny,[0 0 1 1 0 0]);
>> Bfirls = firls(N,[0 10 30 3500 3600 Fny]/Fny,[0 0 1 1 0 0]);
>> Bremez = remez(N,[0 10 30 3500 3600 Fny]/Fny,[0 0 1 1 0 0]);
```

# Diseño de Filtros FIR con MATLAB

```
>> F=0:10:5000;
>> Hfir1=abs(freqz(Bfir1,1,F,Fs));
>> Hfir2=abs(freqz(Bfir2,1,F,Fs));
>> Hfirls=abs(freqz(Bfirls,1,F,Fs));
>> Hremez=abs(freqz(Bremez,1,F,Fs));
>> semilogy(F,Hfir1,'r',F,Hfir2,'g',F,Hfirls,'y',F,Hremez,'m');
```



# Apéndice

## Tablas de Transformaciones Espectrales

Tabla 1

<b>Transformaciones de Filtros pasobajo</b>		
<b>Tipo</b>	<b><math>H(F)</math> ideal</b>	<b>Respuesta a Impulso <math>h[n]</math></b>
Pasobajo	$H_{LP}(F) = \text{rect}(F/2F_C)$	$h_{LP}[n] = 2F_C \text{sinc}(2nF_C)$
Pasoalto	$H_{HP}(F) = 1 - H_{LP}(F)$	$h_{HP}[n] = \delta[n] - h_{LP}[n]$
Pasoalto	$H_{HP}(F) = H_{LP}(F - \frac{1}{2}) = \text{rect}[(F - \frac{1}{2})/2F_C]$	$(-1)^n h_{LP}[n]$
Pasabanda	$H_{BP}(F) = \frac{\text{rect}[(F + F_0)/2F_C] + \text{rect}[(F - F_0)/2F_C]}{2}$	$2 \cos(2\pi nF_0) h_{LP}[n]$
Parabanda	$H_{BS}(F) = 1 - H_{BP}(F)$	$\delta[n] - h_{BP}[n]$

Tabla 2

Transformaciones a Prototipos de Pasabajo			
$F_{p1}, F_{p2}, F_{s1}$ y $F_{s2}$ = límites de pasabanda y parabanda, $F_0$ = Frecuencia Central			
Para BS y BP se asume que tienen simetría respecto a $F_0$			
Transformación	Límite de Pasabanda	Límite de Parabanda	Frecuencia Central
HP2LP	$F_p = F_{sHP}$	$F_s = F_{pHP}$	Si $h_{HP}[n] = \delta[n] - h_{LP}[n]$
HP2LP	$F_p = \frac{1}{2} - F_{pHP}$	$F_s = \frac{1}{2} - F_{sHP}$	Si $h_{HP}[n] = (-1)^n h[n]$
BP2LP	$F_p = \frac{1}{2}(F_{p2} - F_{p1})$	$F_s = \frac{1}{2}(F_{s2} - F_{s1})$	$F_0 = \frac{1}{2}(F_{p2} + F_{p1})$
BS2LP	$F_p = \frac{1}{2}(F_{s2} - F_{s1})$	$F_s = \frac{1}{2}(F_{p2} - F_{p1})$	$F_0 = \frac{1}{2}(F_{p2} + F_{p1})$