Muestreo y Cuantización

- ❐ Muestreo y Cuantización de señales
- ❐ Convertidores Analógico-Digital

Muestreo

- El muestreo digital de una señal analógica trae consigo una discretización tanto en el dominio temporal como en el de la amplitud.
- Hay varias formas de describir matemáticamente el proceso de discretización temporal de una señal continua en el tiempo.
- Nos centraremos en el muestreador ideal, que consiste en una función que toma los valores de la señal $x_C(t)$ en los instantes muestreos y el valor cero para el resto de puntos

$$x_S(t) = x_C(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x_C(nt_s)\delta(t-nt_s) = x_C(t)\cdot x_I(t)$$

  - donde t_s es el periodo de muestreo y $x_I(t)$ es la función de interpolación.
- El muestreo trae consigo una aparente pérdida de información en la señal $x_C(t)$. El Teorema del Muestreo establece en que condiciones se puede muestrear sin pérdida de información.

Muestreo

- Teorema del muestreo: Una señal $x_c(t)$ con un espectro limi-tado a la frecuencia f_B ($|f| \leq f_B$) puede ser muestreada sin pérdida de información si la frecuencia de muestreo f_S supera la cantidad $2f_B$, es decir $f_S \geq 2f_B$.
- Si no se muestrea como mínimo a esa frecuencia tiene lugar el fenómeno denominado "aliasing".

$$x_S(t) = x_C(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nt_s) = x_C(t)\cdot x_I(t)$$

$$X_S(f) = X_C(f) * X_I(f)$$

$$x_I(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - k\cdot t_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\cdot e^{j2\pi kt/t_s}$$

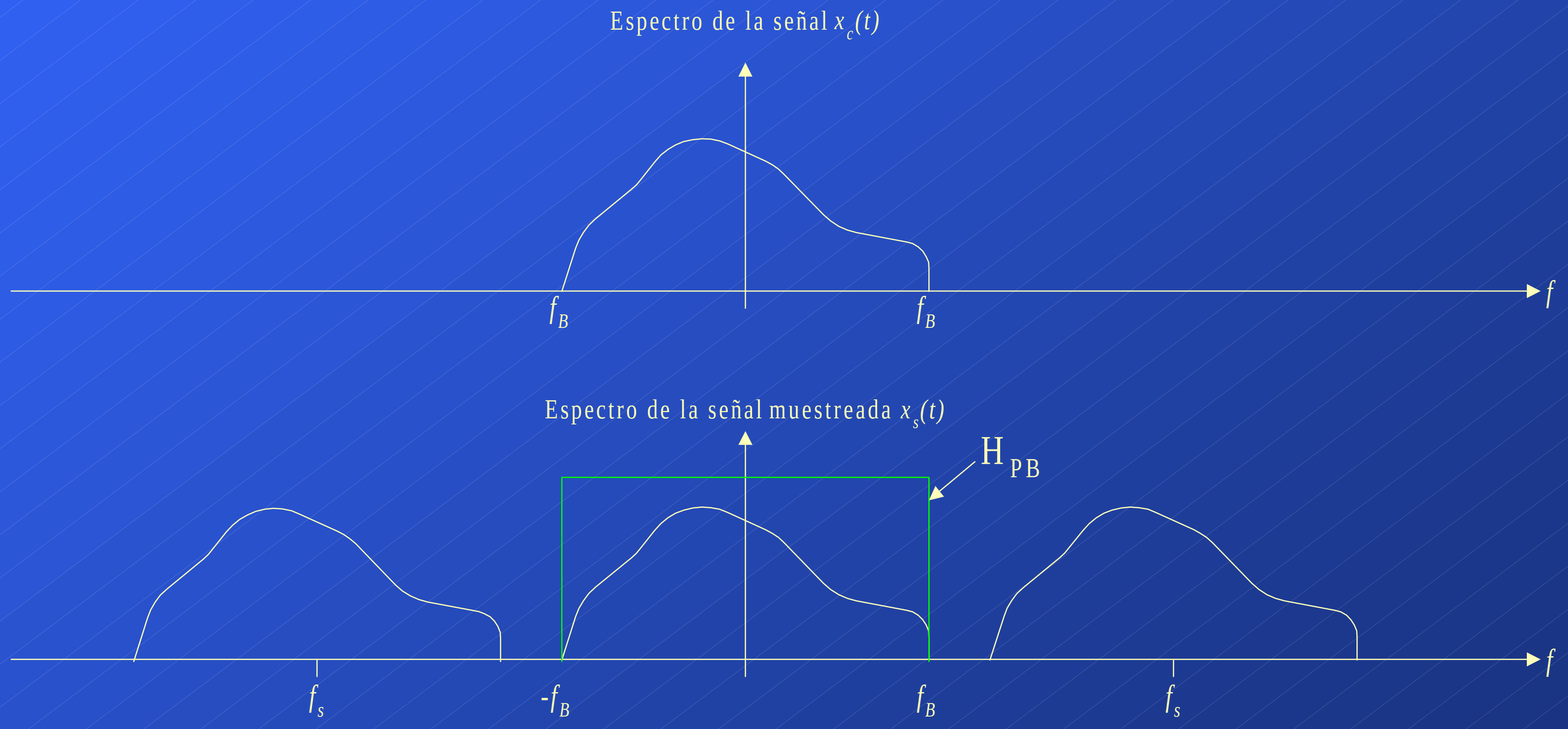
$$C_k = \frac{1}{t_s}\int_{-t_s/2}^{t_s/2}\delta(t)\cdot e^{-j2\pi t/t_s}\cdot dt = \frac{1}{t_s} \Rightarrow X_I(f) = \frac{1}{t_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f - k/t_s)$$

$$X_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty}X_I(f)\cdot X_C(f-\xi)\cdot d\xi = \frac{1}{t_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f - k/t_s)\cdot X_C(f-\xi)\cdot d\xi$$

$$= \frac{1}{t_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_C(f - k/t_s)$$

Muestreo

Es decir, el espectro de la señal muestreada se compone de una función periódica de periodo $1/t_s$, replicándose en cada periodo el espectro de la señal original. Se observa en la figura el porqué del teorema del muestreo.



Muestreo

- Para recuperar la señal original a partir de la muestrada no tenemos más que aplicar un filtro pasobajo con una frecuencia de corte en $f = f_B$ y una amplificación t_s, es decir,

$$X_C(f) = X_S(f) H_{PB}(f) \rightarrow x_C(t) = x_S(t) * h_{PB}(t)$$

$$H_{PB}(f) = t_s rect\left(\frac{f}{2 f_B}\right) \rightarrow h_{PB}(t) = t_s \cdot 2 \cdot f_B \cdot \mathrm{sinc}(t \cdot 2 \cdot f_B)$$

$$x_S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_C(kt_s)\delta(t - kt_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_C[k]\delta(t - kt_s)$$

$$x_C(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_C[k] h_{PB}(t - kt_s) = 2 \cdot t_s \cdot f_B \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_C[k] \cdot \mathrm{sinc}[2 f_B (t - kt_s)]$$

A la función *sinc(t)* se le denomina función de interpolación cardinal.

Muestreo

- Este tipo de reconstrucción de la señal original presenta varios problemas:
  - El dominio de la función *sinc(t)* es infinito.
  - Requiere muestreos pasados y futuros.
  - Existe la posibilidad de truncar la función *sinc(t)*, pero da lugar al efecto Gibbs y además requeriría muchos puntos.
  - No pueden reconstruir funciones con discontinuidades.
- Existen muchas funciones de interpolación. La elección debe hacerse en función de su estabilidad y de su realización física. Veremos algunas realizaciones basadas en Transformadas (FFT) y otras basadas en filtros FIR pasobajo.

Cuantización

- Para procesar señales digitalmente no sólo es necesario muestrear la señal analógica sino también cuantizar la amplitud de esas señales a un número finito de niveles.
- El tipo más usual de cuantización es la cuantización uniforme, en el que los niveles son todos iguales. La mayoría usan un número de niveles que es una potencia de 2. Si $L=2^B$, cada uno de los niveles es codificado a un número binario de B bits.
- Veremos más adelante que la cuantización (o el truncamiento en operaciones mátematicas en un microprocesador) puede producir problemas serios en el diseño de filtros digitales, hasta el punto (en casos graves) de convertir filtros estables en inestables.

Cuantización

- Ruido de Cuantización: Llamaremos $x_S[n]$ a la señal discreta y $x_Q[n]$ a la señal discreta cuantizada. El error es :

$$\varepsilon[n] = x_S[n] - x_Q[n]$$

Se define la relación señal a ruido de cuantización (SNR_Q) como la relación entre la potencia P_S de la señal y la potencia P_N del error $\varepsilon[n]$, medido en decibelios.

$$P_S = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_S^2[n] \qquad P_N = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n]$$

$$SNR_Q(dB) = 10 \cdot \log\frac{P_S}{P_N} = 10 \cdot \log\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_S^2[n]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n]}$$

Cuantización

- Supongamos que tenemos una señal *x(t)* cuyo fondo de escala *D* está dado por $x_{max}-x_{min}$. Si cuantizamos *x(t)* con *L* niveles, la distancia entre dos niveles consecutivos o *resolución Δ* se define como *Δ=D/L*.
- Se denomina *rango dinámico DR*, a la relación entre el fondo de escala D y la resolución, de forma que $DR=2^B$. En decibelios,

$$DR(dB) = 20\,log_{10}\left(2^B\right) = 6.02B$$

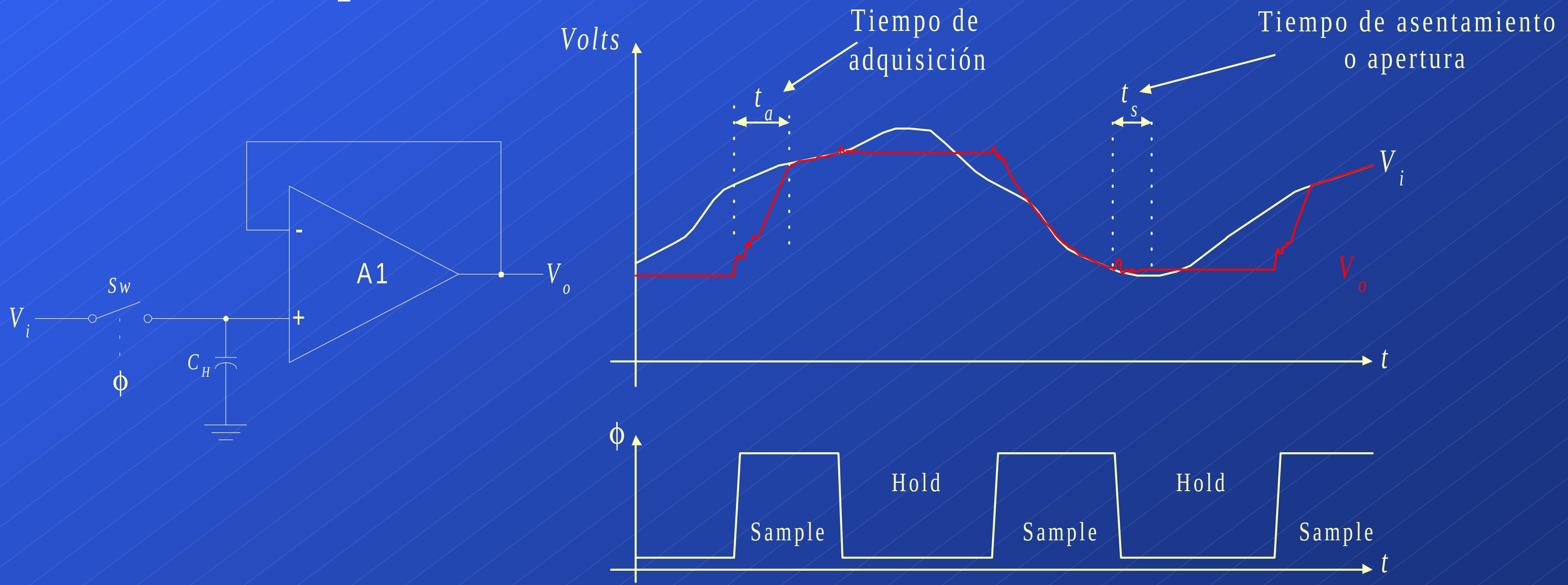
- Para una señal $x_S[n]$ cuantizada a $x_Q[n]$, el error estará entre $-\Delta/2$ y $\Delta/2$. Si *L* es grande la distribución de errores será uniforme en ese intervalo. Para este caso $\Sigma\,\varepsilon^2[n]=\sigma^2=\Delta^2/12$. Sustituyendo

$$\begin{aligned} SNR_Q(dB) &= 10\,log\,P_S - 10\,log\,\Delta^2 + 10\,log\,12 \\ &= 10\,log\,P_S + 10.8 - 20\,log\,D + 20\,log\,L \\ &= 10\,log\,P_S + 10.8 - 20\,log\,D + 6B \end{aligned}$$

  donde hemos utilizado el hecho que $L=2^B$.
- La ecuación sugiere que por cada bit que añadimos al cuantizador, la relación señal a ruido de cuantización mejora en 6 dB.

Convertidores Analógico-Digital

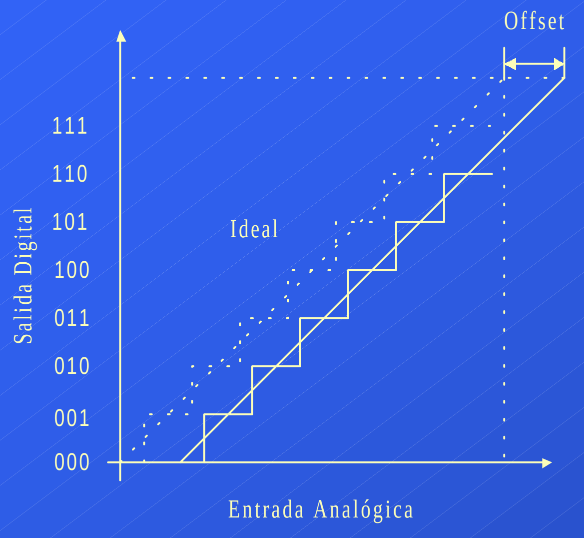
- Se componen de dos circuitos: el muestreador (llamado también Sample & Hold S/H o Track & Hold T/H) y el cuantizador digital.
- La misión del S/H es mantener la señal analógica constante durante el periodo de muestreo.

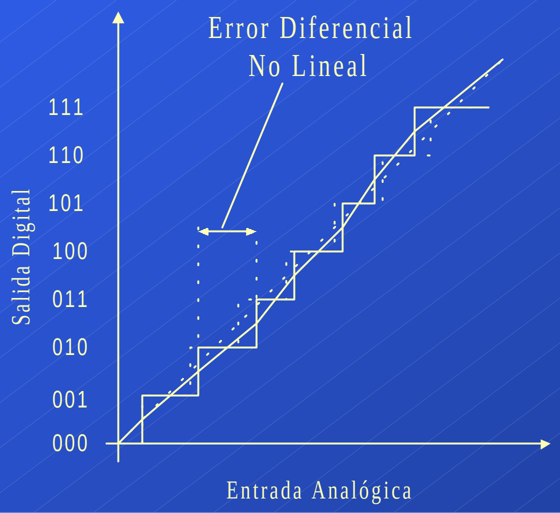


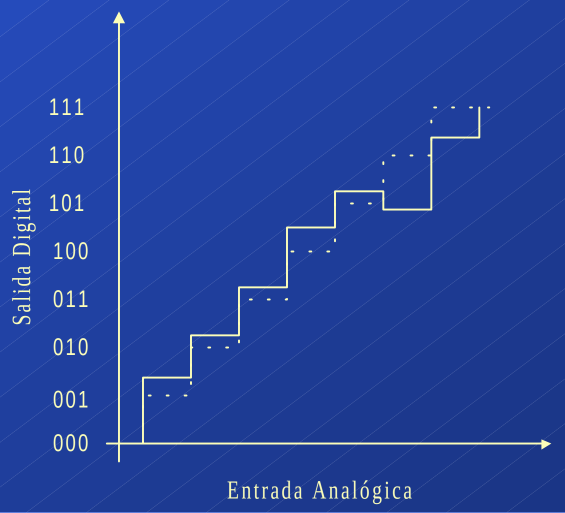
Convertidores Analógico-Digitales

- Características estáticas de un convertidor A/D
  - Error de Offset : Es un desplazamiento constante para todos los valores de la curva característica.
  - Error de Ganancia : Produce un valor de fondo de escala incorrecto. Un error de ganancia positivo hace que el valor de fondo de escala analógico se obtenga con un código digital menor que el todo “1s”. Un error de ganancia negativo hace que el código de todo “1” sea producido por un valor menor que el fondo de escala.
  - Error diferencial no-lineal : Es la máxima diferencia entre dos valores de entrada que producen códigos de salida consecutivos.
  - Error integral no-lineal : Es la integral del área limitada por la curva característica del convertidor y la curva ideal.
  - Error de monotonicidad : Especifica que la curva característica del convertidor no es creciente.

Convertidores Analógico-Digitales







Convertidores Analógico-Digitales

- Características estáticas de un convertidor A/D
  - Resolución : La resolución es altamente dependiente de las características del amplificador operacional de entrada, tanto en el S/H como en el comparador. Sabemos que las características de un AO (ganancia DC, ruido de entrada) dependen de la frecuencia. Por ejemplo, la ganancia DC de un AO para un error menor que *0.5 LSB*, deberá ser 2^{N+1}. Esta ganancia disminuye con la frecuencia, por lo que la resolución también disminuye.

Convertidores Analógico-Digitales

Características dinámicas

- Tiempo de Conversión: el tiempo desde que se aplica la señal de convertir hasta que la señal digital esté disponible en la salida.
- Tiempo de Adquisición (t_a en el S/H): es el tiempo durante el cual el S/H debe permanecer en estado de “sample”, para asegurarse que el consiguiente estado “hold” esté dentro de la banda de error especificada para la señal de entrada.
- Tiempo de Asentamiento (t_s en el S/H): es el intervalo de tiempo entre la señal de “hold” y el definitivo asentamiento de la señal (dentro de la banda de error especificada).
- La frecuencia máxima de conversión del convertidor A/D será por lo tanto,

$$f_S = \frac{1}{T_S} = \frac{1}{t_s + t_a}$$

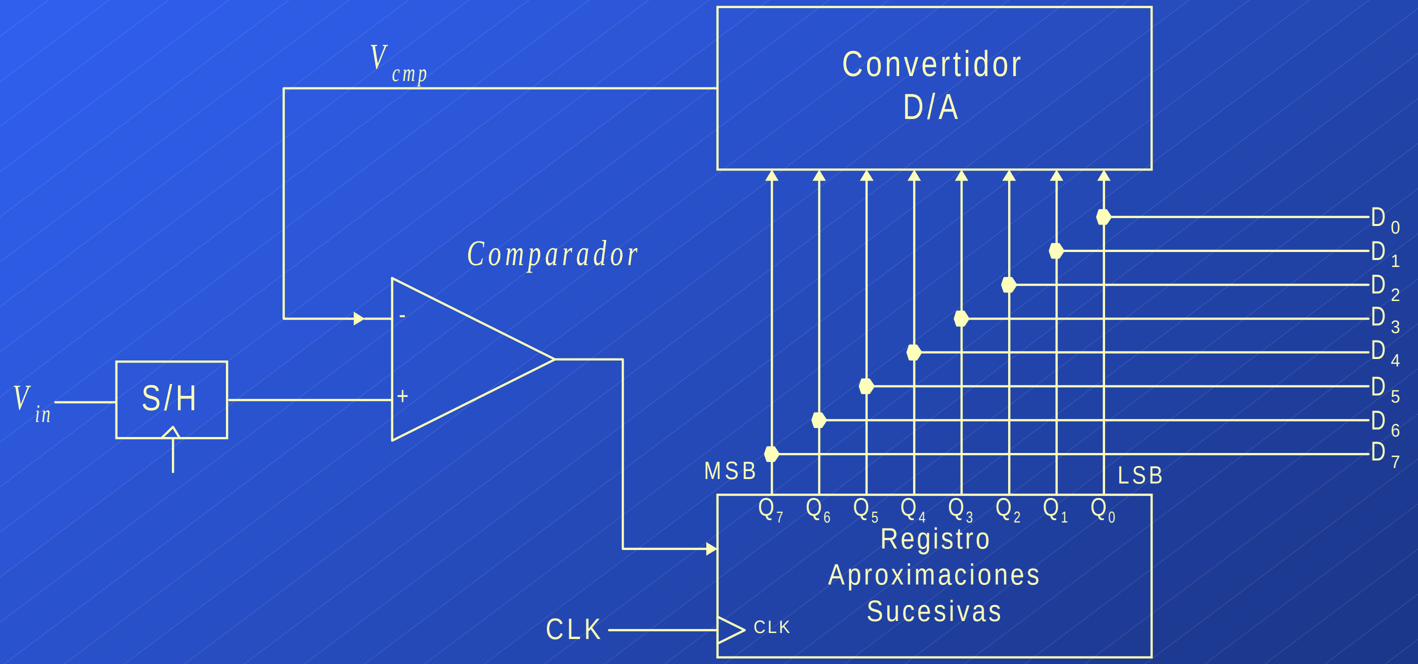
- Slew Rate : Es la velocidad a la cual el valor de la salida del S/H converge al valor muestreado deseado (*V/s*).

Convertidores Analógico-Digital

- Características de Estabilidad
  - Definen la inmunidad de las características mencionadas anteriormente con el tiempo, temperatura, fuentes de alimentación y envejecimiento del componente.
  - Coeficientes de Temperatura para la linealidad, ganancia, offset.

Convertidores Analógico-Digital

- Convertidor Analógico-Digital
  - Aproximaciones Sucesivas



Convertidores Analógico-Digital

- Convertidor Flash