Aplicaciones de Filtros Digitales

- Diferenciadores FIR.
- Transformación de Hilbert.
- Interpolación y Decimación.
- Filtros Peine.
- Filtros Pasatodo.
- Filtros Notch.

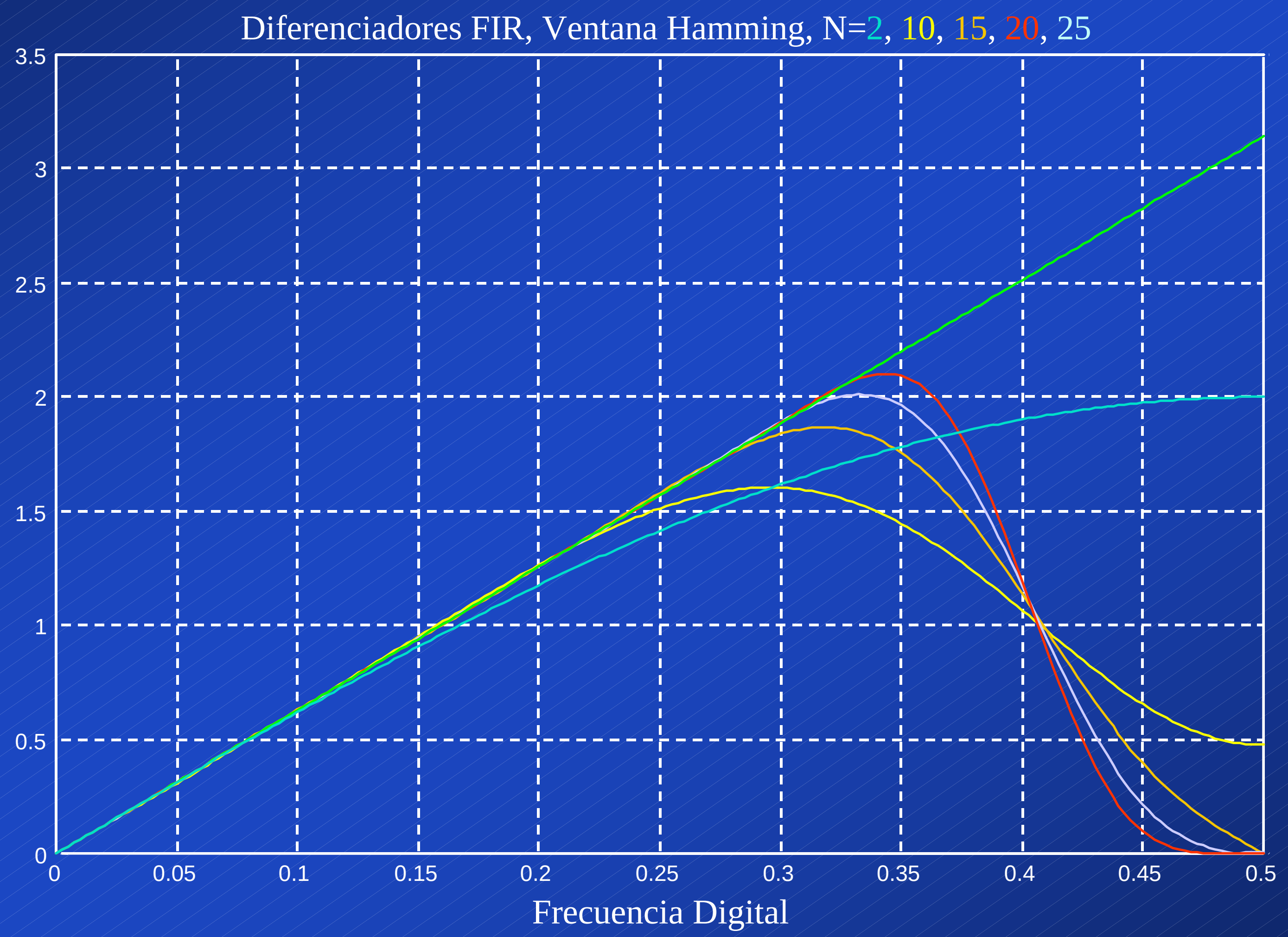
Aplicaciones de Filtros Digitales

- <u>Diseño de diferenciadores FIR</u>
  - La respuesta frecuencial de un diferenciador es $H(F)=j2\pi F$, para $|F|\leq F_C$. F_C es la frecuencia hasta la que queremos diferenciar. Ya que *H(F)* es imaginario necesitamos secuencias de los tipos 3 y 4 (simetría impar). Si *N* es además impar *h[0]=0.*
  - Para determinar la secuencia *h[n]* hacemos la transformada inversa de *H(F)*,

$$h[n]=j\int_{-F_C}^{F_C} 2\pi F\exp(j2\pi nF)dF=\frac{2n\pi F_C\cos(2n\pi F_C)-\sin(2n\pi F_C)}{\pi n^2}$$

    Una vez obtenida la secuencia podemos aplicarle una ventana para reducir sobreimpulsos. Nótese que para secuencias con *N* impar, *H(0.5)=0*.
  - En la figura se muestran algunos diferenciadores FIR de distintos y tamaños para $F_C=0.4$ usando una ventana de Hamming.

Aplicaciones de Filtros Digitales

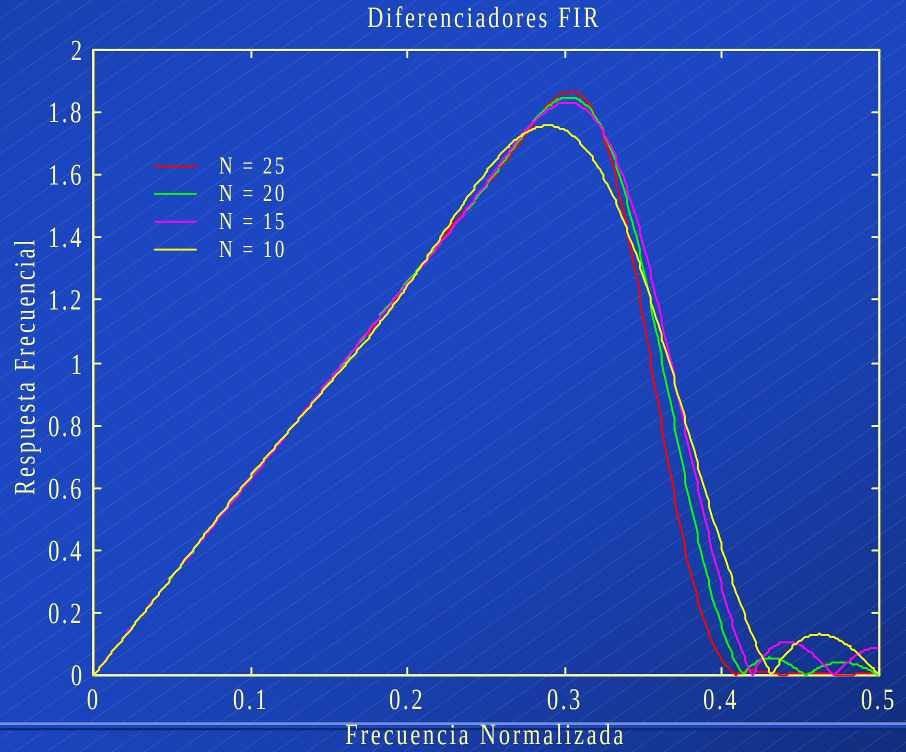


Aplicaciones de Filtros Digitales

- Diseño de diferenciadores en MATLAB con las funciones `firls` y `remez`.

  Por ejemplo para diseñar un diferenciador con una frecuencia de corte normalizada $F_C=0.3$, haremos

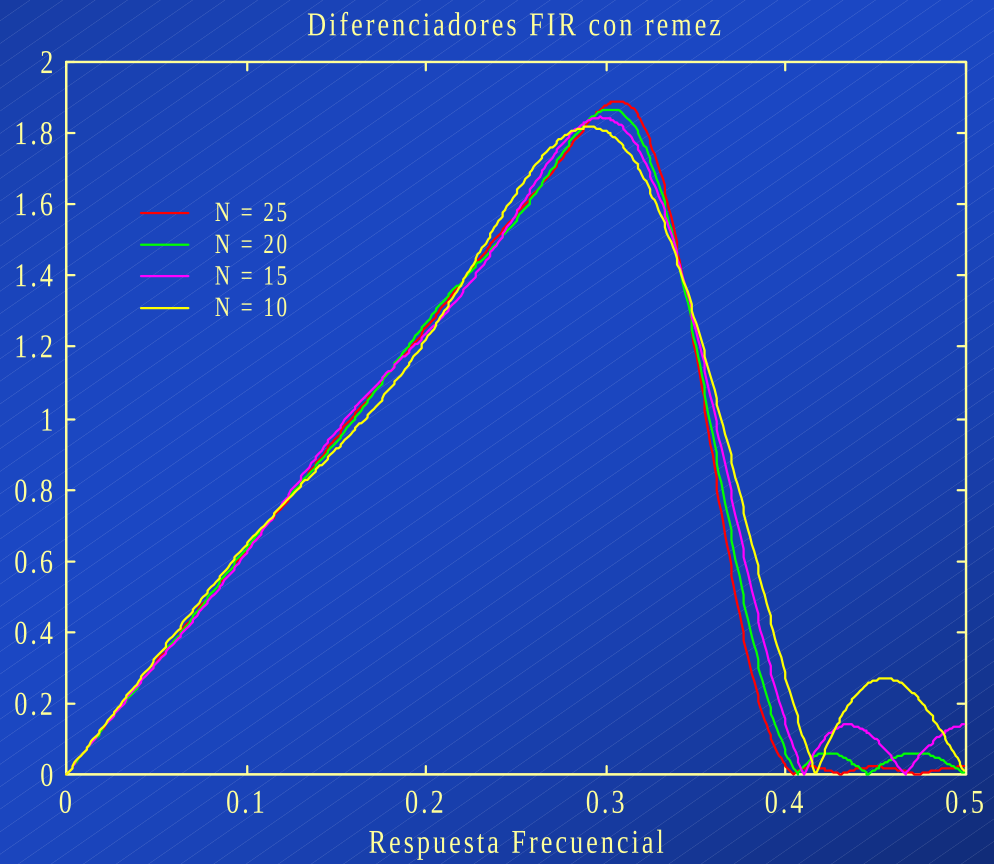
```
>> Fc=0.3;N=25;
>> B=firls(N,[0 0.3 0.4 0.5]*2,[0 0.3 0 0]*2*pi,'differentiator');
>> [H,W]=freqz(B,1,500);plot(W/(2*pi),abs(H));
```



Aplicaciones de Filtros Digitales

Utilizando ahora la función `remez`.

```
>> B=remez(25,[0 0.4 0.4 0.5]*2,[0 0.3 0 0]*2*pi,'differentiator');
>> [H,W]=freqz(B,1,500);plot(W/(2*pi),abs(H));
```



Aplicaciones de Filtros Digitales

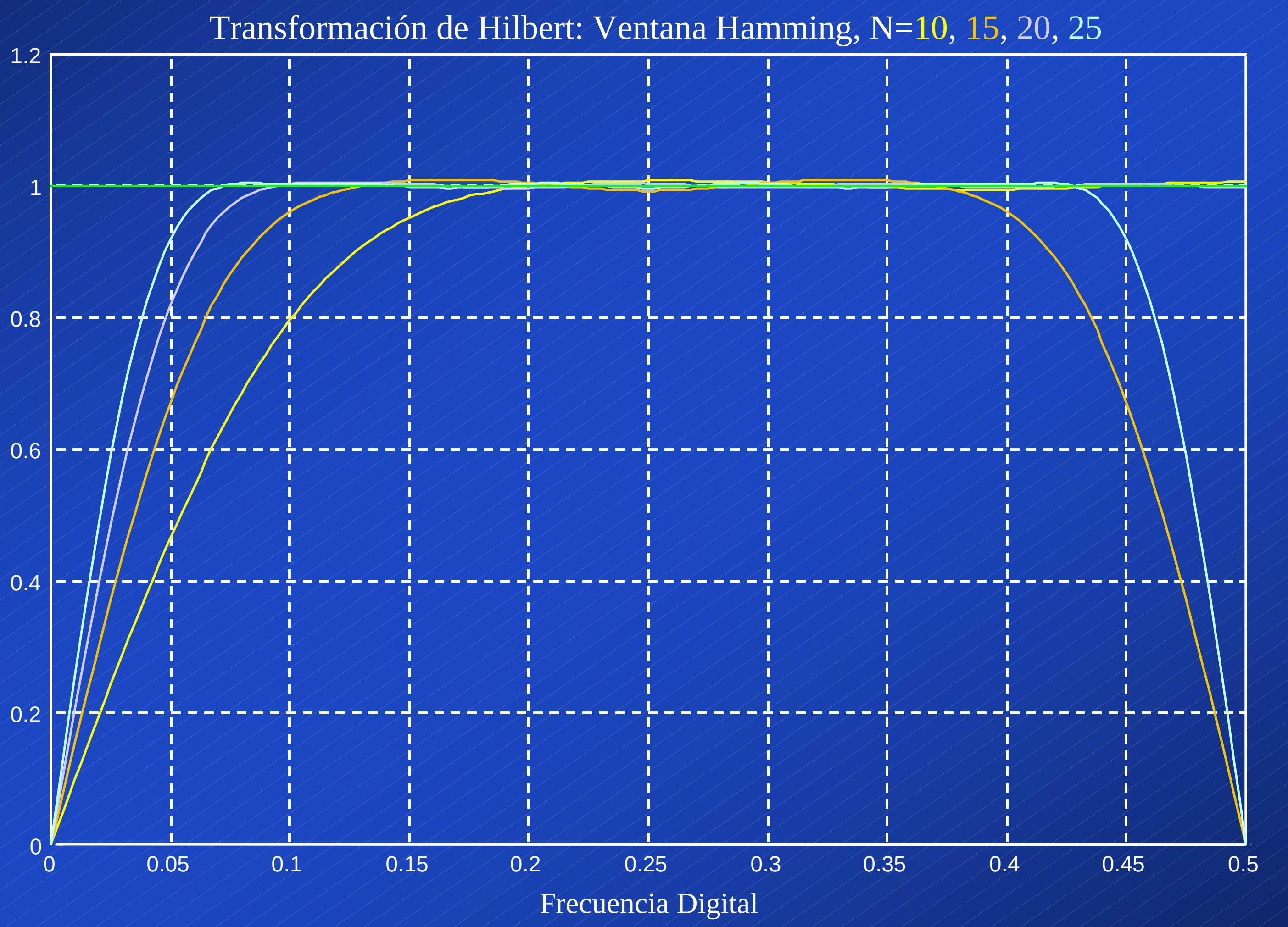
- <u>Diseño de Transformaciones de Hilbert</u>
  - La transformación de Hilbert ideal viene dado por

    $H(F)=-j\cdot signo(F)$ $h[n]=[1-\cos(n\pi)]/n\pi$ $h[0]=0$

    La transformación de Hilbert desplaza la fase de una señal *-90º* (-π/2).
  - En aplicaciones prácticas se requerirá este desplazamiento de fase hasta una frecuencia F_C, de forma que para calcular la secuencia *h[n]* hacemos la transformada inversa,

    $$h[n]=\int_{-F_C}^{F_C} -j\cdot \mathrm{signo}(F)\cdot \exp(j2n\pi F)dF = \frac{1-\cos(2n\pi F_C)}{n\pi}$$
  - Ya que *H(F)* es imaginaria, las secuencias deben ser del tipo 3 ó 4.
  - De igual forma que en el diseño de los diferenciadores, la *h[n]* obteni-da debe ser truncada por una de la ventanas habituales.
  - En la figura se muestran las respuestas frecuenciales de varias Trans-formaciones de Hilbert para distintas longitudes de secuencia, y para $F_C=0.4$.
  - Para secuencias de longitud impar, *H(0.5)* es siempre *0*.

Aplicaciones de Filtros Digitales

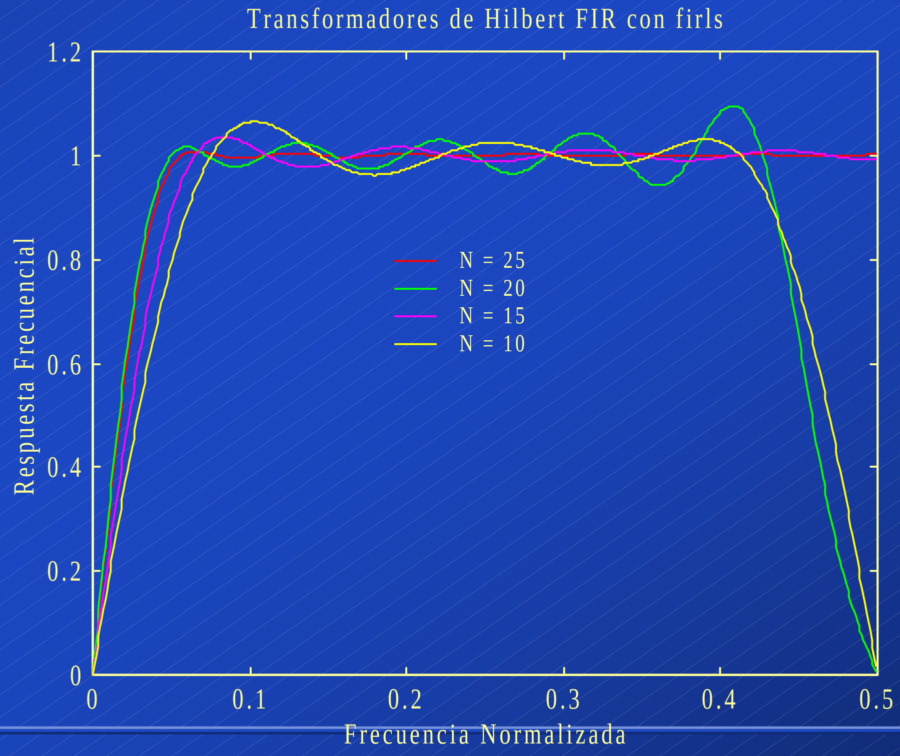


Aplicaciones de Filtros Digitales

❒ Diseño de Transformadores de Hilbert con MATLAB

Usaremos las funciones `firls` y `remez` con una frecuencia de corte $F_C=0.05$.

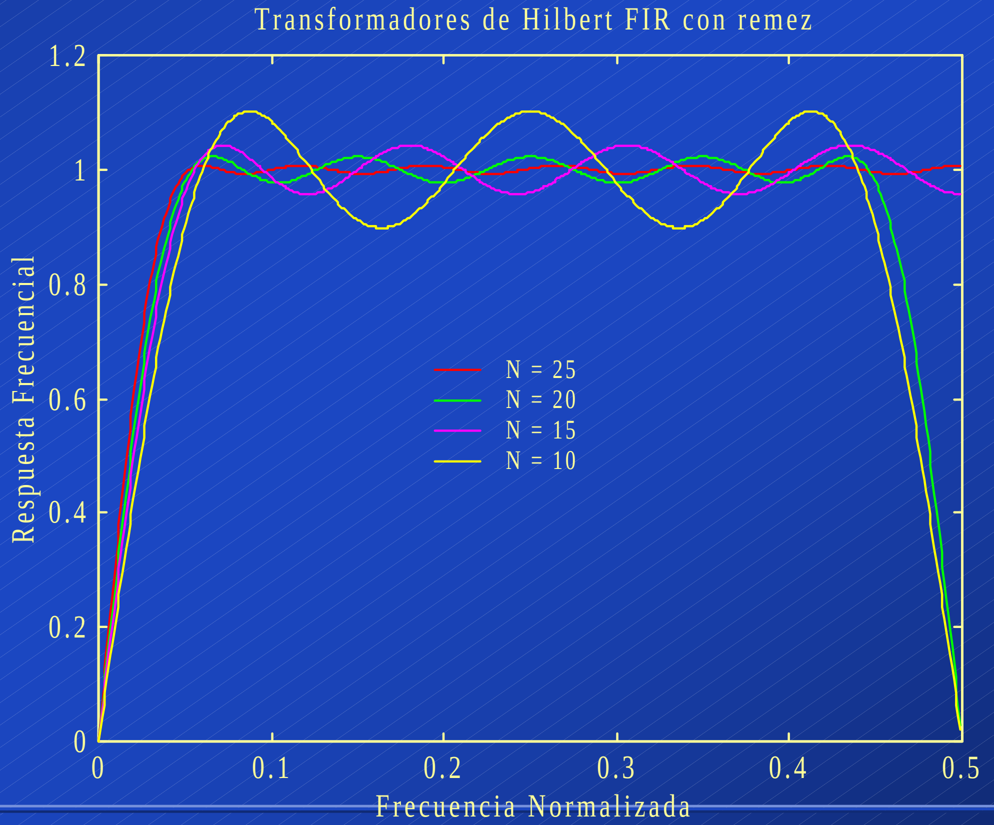
```
>> B=firls(25,[0.05 0.5]*2,[1 1],'hilbert');
>> [H,W]=freqz(B,1,500); plot(W/(2*pi),abs(H),'r');hold;
>> B=firls(25,[0.05 0.45 0.47 0.5]*2,[1 1 0 0],'hilbert');
>> [H,W]=freqz(B,1,500);plot(W/(2*pi),abs(H),'r');
```



Aplicaciones de Filtros Digitales

Con la función `remez`,

```
>> B=remez(20,[0.05 0.45 0.47 0.5]*2,[1 1 0 0],[100 1],'hilbert');
>> [H,W]=freqz(B,1,500);
>> B=remez(25,[0.05 0.5]*2,[1 1],'hilbert');
>> [H,W]=freqz(B,1,500);
```



Aplicaciones de Filtros Digitales

- Aplicaciones de Alteración de la Frecuencia de muestreo.
- Interpolación

Consiste en aumentar la frecuencia de muestreo, obteniendo muestreos de mayor frecuencia a partir de datos muestreados a menor frecuencia.

Up-Sampler

Aumentar la frecuencia de una señal por un factor entero $L > 1$, se insertan $L-1$ ceros entre dos muestreos consecutivos de la señal de entrada $x[n]$, lo que produce una salida $x_u[n]$.
Matemáticamente,

$$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots, \\ 0 & resto \end{cases}$$

La operación de *up-sampling* es lineal, pero no es invariante en el tiempo.

Para realizar una verdadera interpolación deberemos sustituir los ceros insertados por valores apropiados de la señal. Eso se hará introduciendo un filtro pasobajo, tal y como veremos ahora.

Función de Transferencia del Up-Sampler

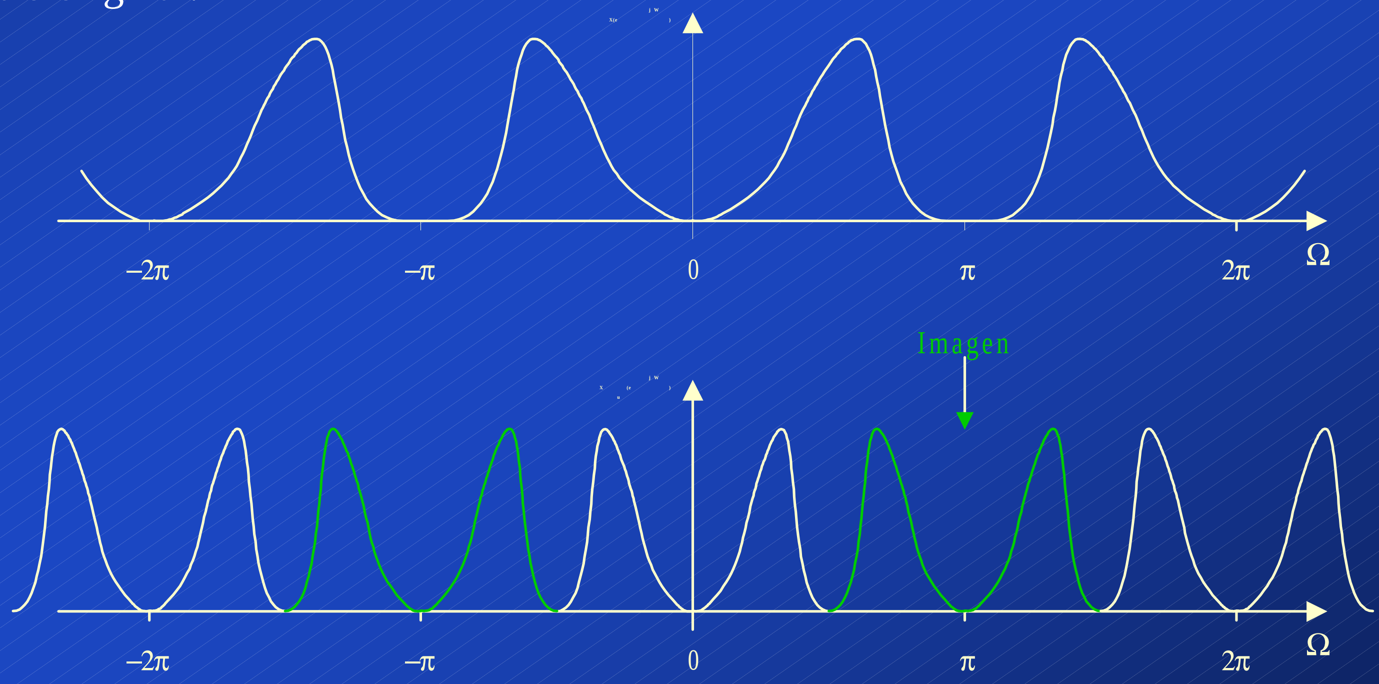
$$X_u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n/L] \cdot z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot z^{-mL} = X\left(z^L\right)$$

Aplicaciones de Filtros Digitales

En el círculo unidad, la relación anterior se convierte en,

$$X_u\left(e^{j\omega t_s}\right) = X\left(e^{j\omega t_s L}\right)$$
$$X_u\left(e^{j\Omega}\right) = X\left(e^{j\Omega L}\right)$$

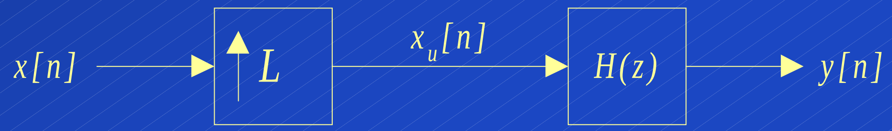
Es decir, un aumento por un factor *L* de la frecuencia de muestreo conlleva una repetición $\times L$ del espectro de la señal *x[n]*. La figura muestra los efectos de doblar la frecuen-cia de muestreo. En general, aumentar la frecuencia de muestreo por un factor *L* introduce *L-1* imágenes del espectro original.



Aplicaciones de Filtros Digitales

Filtro de Interpolación

Para interpolar la señal de entrada no tenemos más que aplicar un filtro pasobajo a la salida del *up-sampler*. De esta forma los ceros que habíamos insertado en el *up-sampler* se convierten ahora en valores interpolados.



Podemos obtener las especificaciones del filtro pasobajo necesario.Supongamos que $x[n]$ ha sido obtenido muestreando una señal continua $x_a(t)$ cuyo espectro viene dado por $X_a(j\omega)$. El espectro de $x[n]$ es $X(e^{j\Omega})$. Estas dos transformadas están relacionadas por la siguiente expresión:

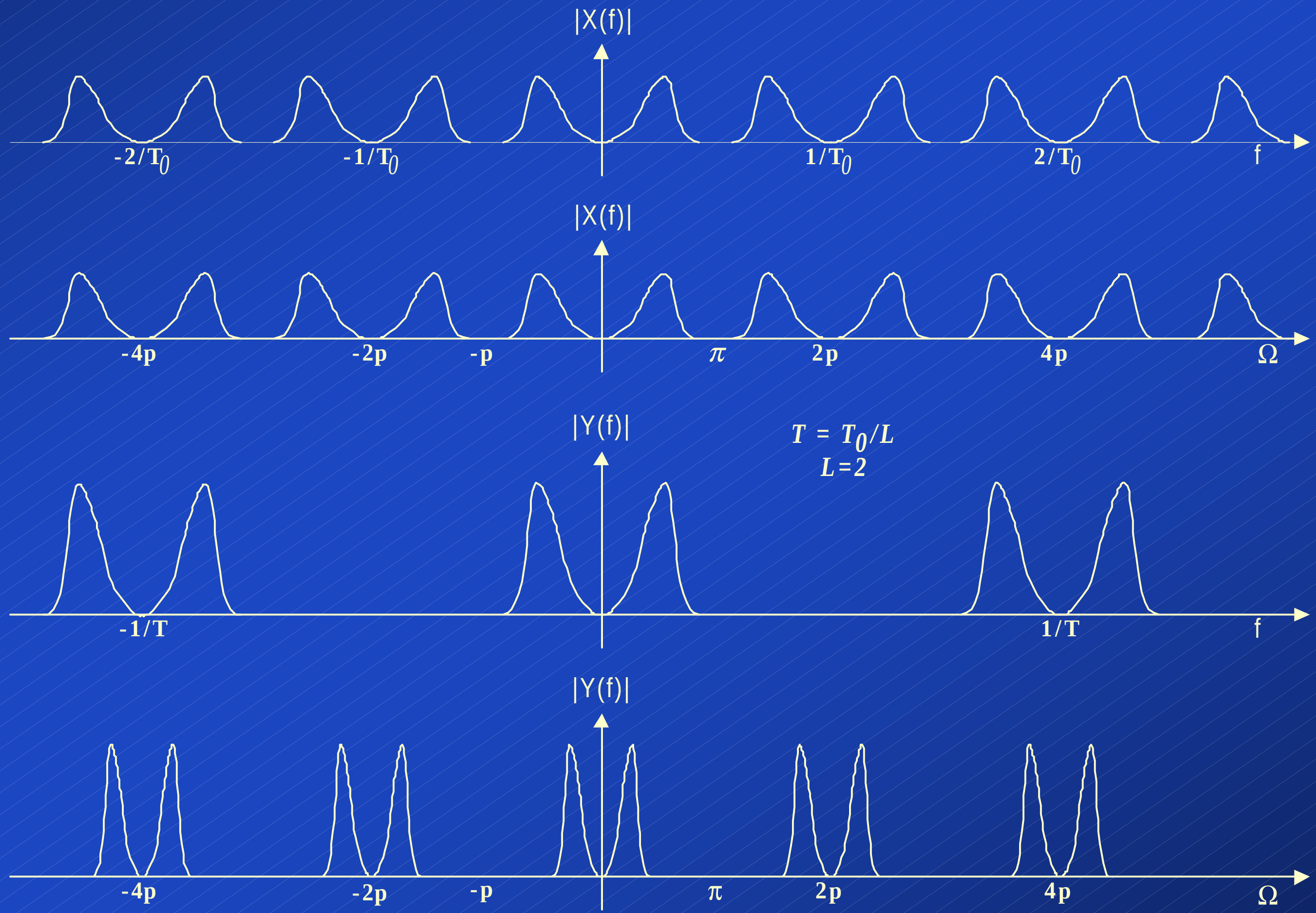
$$X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - k/T_0)$$

donde T_0 es el periodo de muestreo. Si muestreamos $x_a(t)$ a una frecuencia mayor de forma que $T=T_0/L$, obtenemos $y[n]$, cuya transformada de Fourier es $Y(e^{j\Omega})$, de forma que,

$$Y(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - k/T) = \frac{L}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(f - \frac{k}{T_0/L}\right)$$

Aplicaciones de Filtros Digitales

De las ecuaciones anteriores se deduce que si pasamos $x_u[n]$ a través de un filtro pasobajo ideal de frecuencia de corte $\Omega_c = \pi / L$ y ganancia L, la salida del filtro es precisamente $y[n]$.



Aplicaciones de Filtros Digitales

Filtros de Nyquist

Son una generalización de los filtros de media banda que vimos en el capítulo dedicado a filtros FIR. Allí se vió que este tipo de filtros contiene coeficientes de valor cero, que hace que su computación sea más sencilla. Además, cuando se utilizan como filtros de interpolación, preservan el valor original del muestreo a la salida del filtro. Estos filtros también se denominan filtros de *L* bandas. Los filtros de media banda son aquellos en los que $L=2$.

El diseño un filtro FIR de *L* bandas con una frecuencia de corte $\omega_c=\pi/L$ lo haremos por el método de las series de Fourier. En este método los coeficientes del filtros vienen dados por,

$$h[n] = h_{LP}[n] \cdot w[n]$$

donde $h_{LP}[n]$ es la respuesta a impulso de un filtro pasobajo ideal con una frecuencia de corte π/L y $w[n]$ es una ventana espectral. Aplicando el método de las series de Fourier para una frecuancia de corte π/L,

$$h_{LP}[n] = \frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n}, \qquad -\infty \leq n \leq \infty$$

Esto nos garantiza que los valores de muestreo son preservados después de hacer el *up-sampling*.

Aplicaciones de Filtros Digitales

- Decimación: disminución de la frecuencia de muestreo en un factor entero.

Down-Sampler

Hacer un *down-sampling* de un factor entero $M>1$ consiste en guardar uno de cada M valores muestreados y eliminando los $M-1$ muestreos intermedios, generando una señal de salida $x_d[n]$ de acuerdo con la siguiente relación: $x_d[n]=x[nM]$. Al igual que la operación de *up-sampling*, el *down-sampling* es lineal pero es variante en el tiempo. Disminuir la frecuencia puede tener implicaciones a la hora de cumplir el teorema del muestreo, por lo que tendremos que introducir un filtro pasobajo antes de hacer el *down-sampling*.

Función de Transferencia del Down-Sampler

Creamos una función auxiliar $x_{aux}[n]$, que definimos,

$$x_{aux}[n]=\begin{cases} x[n] & n=0,\pm M,\pm 2M,\ldots, \\ 0 & otro \end{cases}$$

$$X_d(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[Mn]\cdot z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{aux}[Mn]\cdot z^{-n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{aux}[k]\cdot z^{-k/M}=X_{aux}\left(z^{1/M}\right)$$

Relacionamos $x_{aux}[n]$ con $x[n]$ mediante la siguiente ecuación,

$$x_{aux}[n]=c[n]\cdot x[n] \quad \text{donde} \quad c[n]=\begin{cases} 1 & n=0,\pm M,\pm 2M,\ldots, \\ 0 & resto \end{cases}$$

Otra forma de expresar $c[n]$ es, $c[n]=\dfrac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} e^{-j2\pi kn/M}$

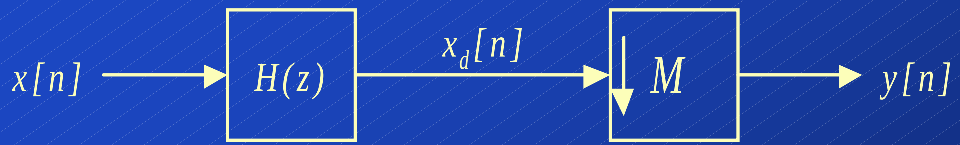
Aplicaciones de Filtros Digitales

$$X_{aux}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n]\cdot x[n]\cdot z^{-n} = \frac{1}{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{M-1} e^{-j2\pi kn/M}\right)\cdot x[n]\cdot z^{-n} = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot e^{-j2\pi kn/M}\cdot z^{-n}\right) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(z\cdot e^{-j2\pi k/M}\right)$$

$$X_d(z)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{1/M}\cdot e^{-j2\pi k/M}\right) \rightarrow X_d(f)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j2\pi(f\cdot t_s-k)/M}\right)$$

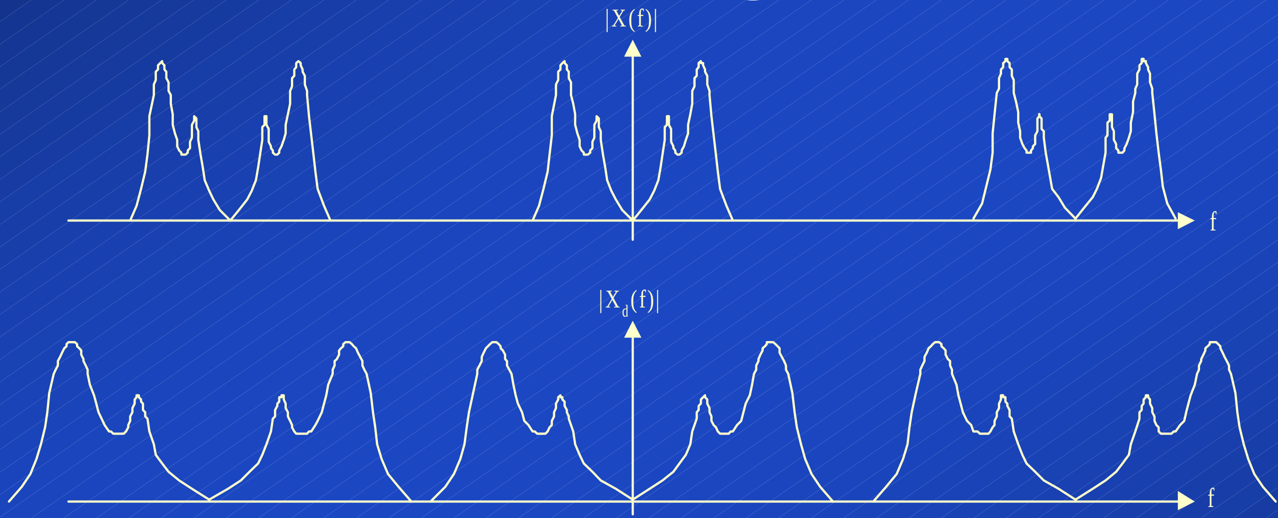
Esto quiere decir que la función de transferencia del *down-sampler* es la suma de M versiones ensanchadas (multiplicación por t_s) y desplazadas de la función de transferencia $X(z)$, y multiplicadas por el factor $1/M$. Debido a que se ha disminuido la frecuencia de muestreo en un factor M, no ocurrirá aliasing si la señal $x[n]$ tiene un espectro limitado entre $\pm\pi/M$. En la figura se observa que a no ser que se introduzca un filtro pasobajo apropiado, se va a producir aliasing a la salida del *down-sampler*. Este filtro deberá colocarse antes del *down-sampler* para ser efectivo. Un filtro ideal deberá tener una frecuencia de corte igual a π/M. En la práctica siempre tendremos una banda de transición por lo que las especificaciones de filtro serán:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_c/M\\ 0, & \pi/M\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

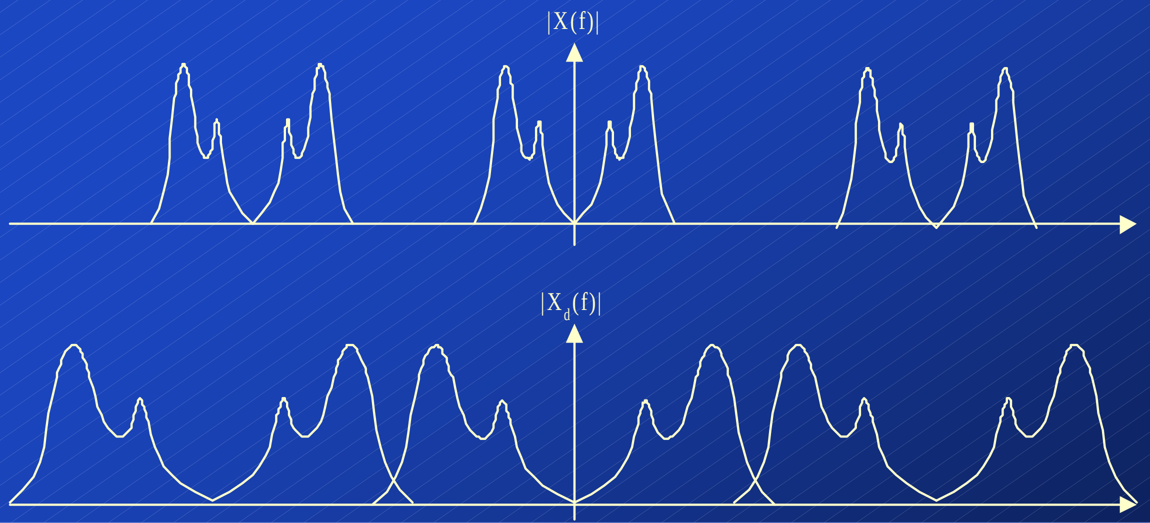


Aplicaciones de Filtros Digitales

Decimación sin "aliasing"



Decimación con "aliasing"



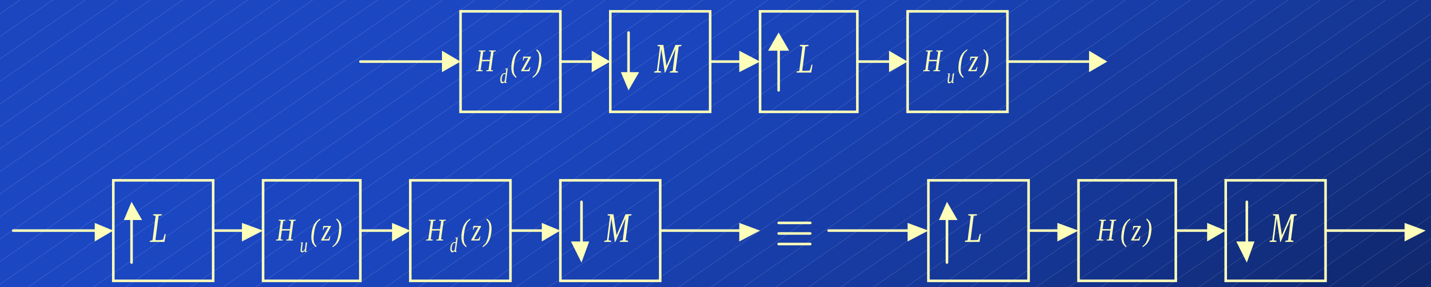
Aplicaciones de Filtros Digitales

- <u>Alteración fraccional de la frecuencia de muestreo</u>

  Se consigue utilizando en cascada un decimador por *M* y un interpolador por *L*, donde *M* y *L* son enteros. El sistema final es un decimador por *M/L* o bien un interpolador por *L/M*. La figura muestra dos posibles configuraciones en cascada. De las dos, la más eficiente es la segunda ya que sólo será necesario realizar un filtro que cumpla las dos condiciones del interpolador y del decimador. Esto se consigue con un filtro con la frecuencia de corte,

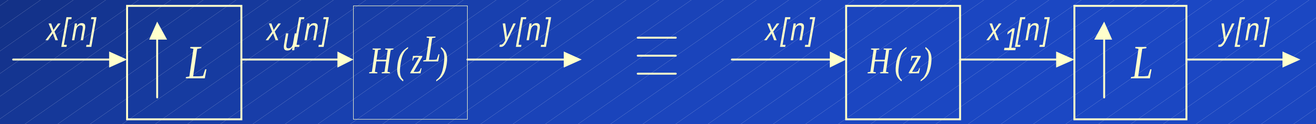
$$\Omega_s = \min\left(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right)$$

  Esta frecuencia suprime las imágenes causadas por el interpolador y al mismo tiempo garantiza la ausencia de aliasing que causaría el decimador.



Aplicaciones de Filtros Digitales

- Propiedades de interpoladores y decimadores

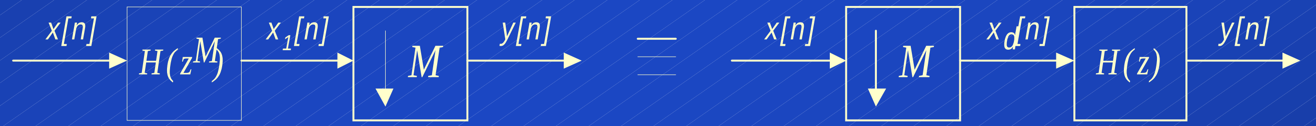


$$X_u(z) = X(z^L)$$

$$Y(z) = H(z^L)\cdot X_u(z) = H(z^L)\cdot X(z^L)$$

$$X_1(z) = H(z)\cdot X(z)$$

$$Y(z) = X_1(z^L) = H(z^L)\cdot X(z^L)$$



$$X_1(z) = H(z^M)\cdot X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X_1\left(z^{1/M}\cdot e^{-j2\pi k/M}\right)$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H\left(z\cdot e^{-j2\pi k}\right)\cdot X\left(z^{1/M}\cdot e^{-j2\pi k/M}\right)$$

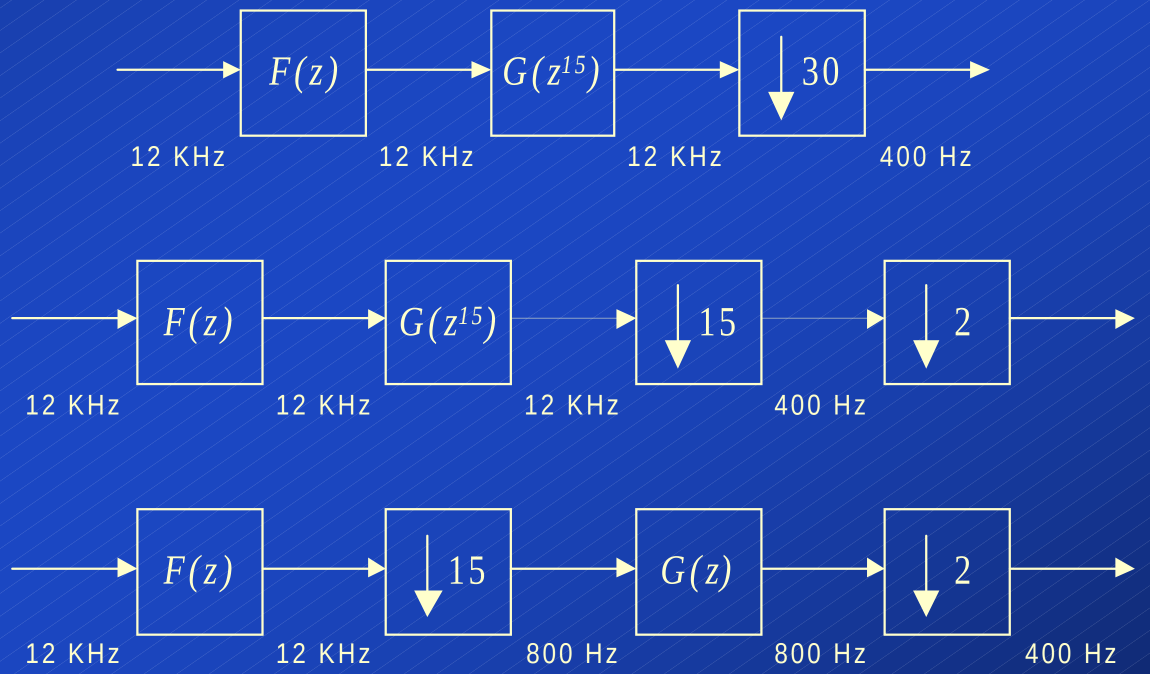
$$= \frac{H(z)}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{1/M}\cdot e^{-j2\pi k/M}\right)$$

$$X_d(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{1/M}\cdot e^{-j2\pi k/M}\right)$$

$$Y(z) = H(z)\cdot X_d(z) = \frac{H(z)}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{1/M}\cdot e^{-j2\pi k/M}\right)$$

Aplicaciones de Filtros Digitales

- Para los filtros de decimación se utilizan filtros FIR, ya que sólo deberemos calcular uno de cada *M* puntos. Por el contrario, en los filtros IIR deberemos calcular todos y cada uno de los puntos debido a que es un filtro recursivo.
- Para reducir las ncesidades computacionales en la realización de estos filtros se suele recurrir a la realización de interpoladores (o decimadores) en cascada. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo, en el que se han utilizado las propiedades de interpoladores y decimadores.



Aplicaciones de Filtros Digitales

- Para las operaciones en cascada es muy útil la descomposición en polifase de las funciones de transferencia.
- Veamos con un ejemplo la descomposición en polifase de una función de transferencia,

$$H(z)=h[0]+h[1]z^{-1}+h[2]z^{-2}+h[3]z^{-3}+h[4]z^{-4}+h[5]z^{-5}+h[6]z^{-6}+h[7]z^{-7}+h[8]z^{-8}$$

- Descomponemos en términos pares e impares,

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0]+h[2]z^{-2}+h[4]z^{-4}+h[6]z^{-6}+h[8]z^{-8}+ \\ &\quad + z^{-1}\left(h[1]+h[3]z^{-2}+h[5]z^{-4}+h[7]z^{-6}\right) \\ &= E_0\left(z^2\right)+z^{-1}E_1\left(z^2\right) \end{aligned}$$

- También se podría haber descompuesto en tres o en más términos. En general,

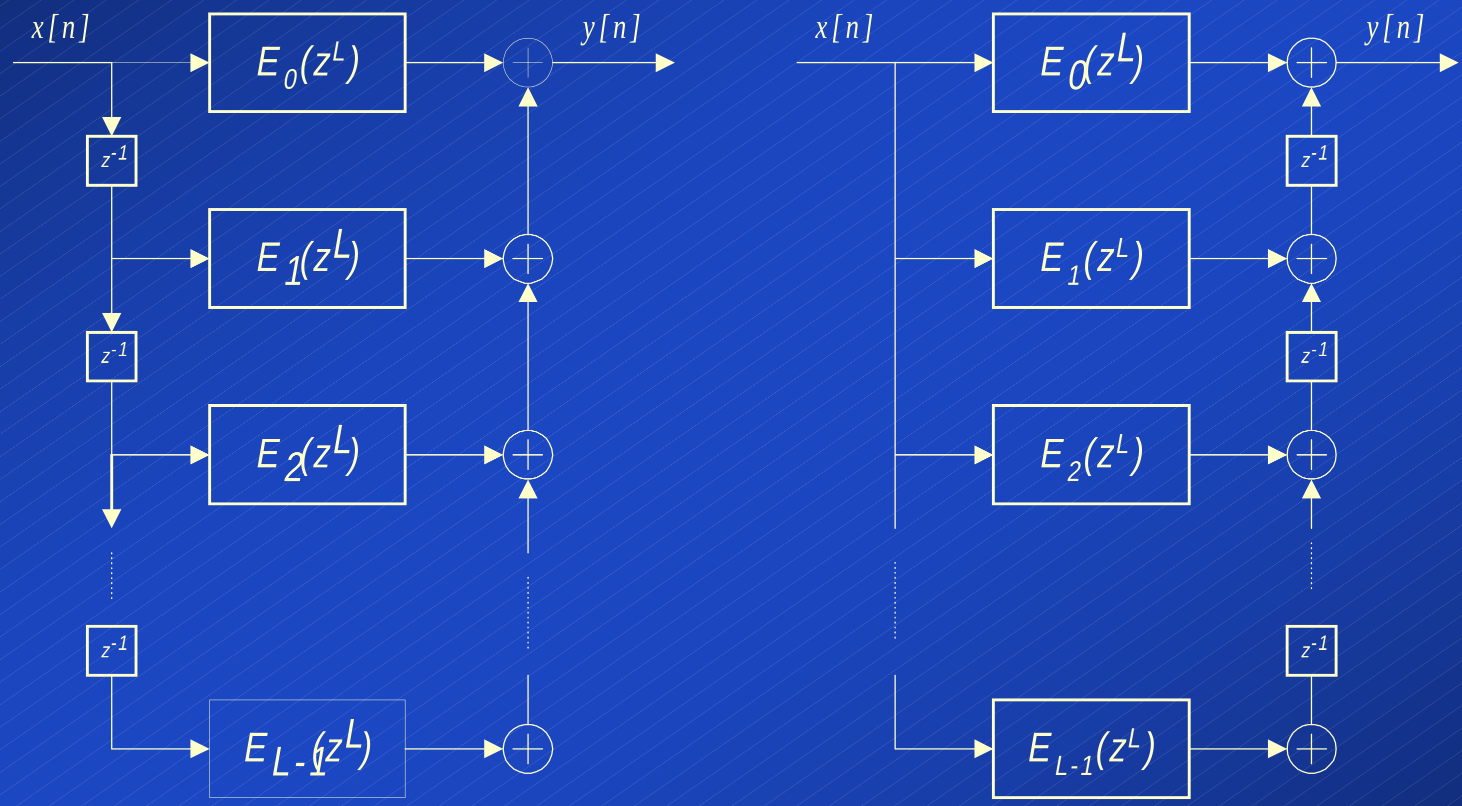
Sea $\quad H(z)=\sum_{k=0}^{M-1} h[k]\cdot z^{-k}$

La descomposición en polifase con L términos es,

$$H(z)=\sum_{k=0}^{L-1} z^{-k}E_k\left(z^L\right)$$

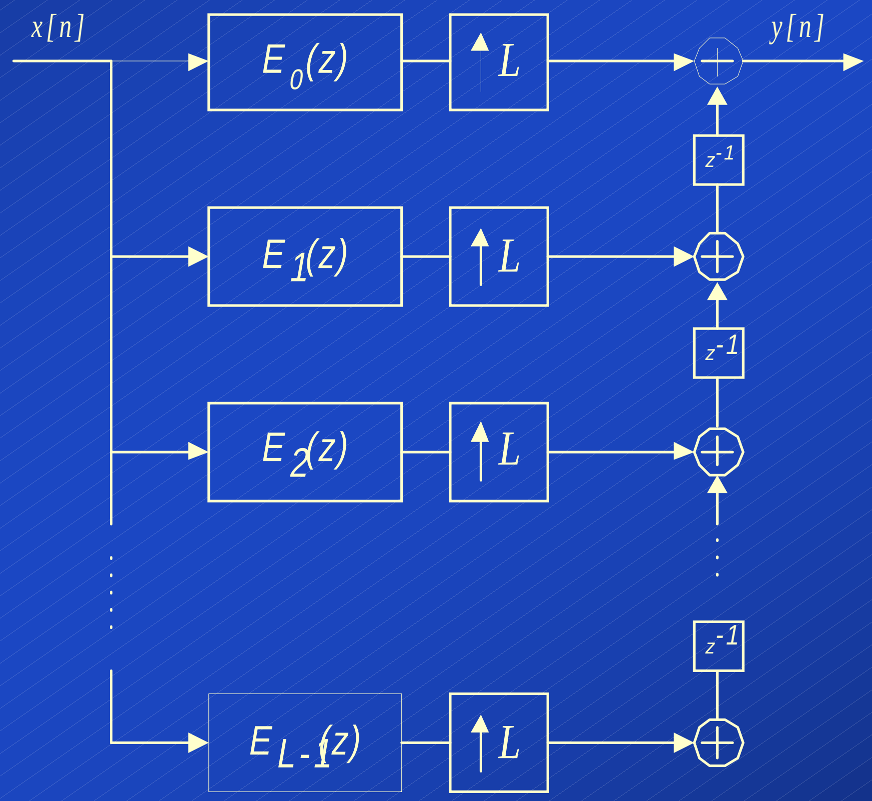
$$E_k(z)=\sum_{n=0}^{\lfloor M/L \rfloor} h[nL+k]\cdot z^{-n}$$

Aplicaciones de Filtros Digitales



Aplicaciones de Filtros Digitales

- Si *H(z)* es un filtro de interpolación $\times L$, y utilizo la descomposición en polifase de la página anterior,

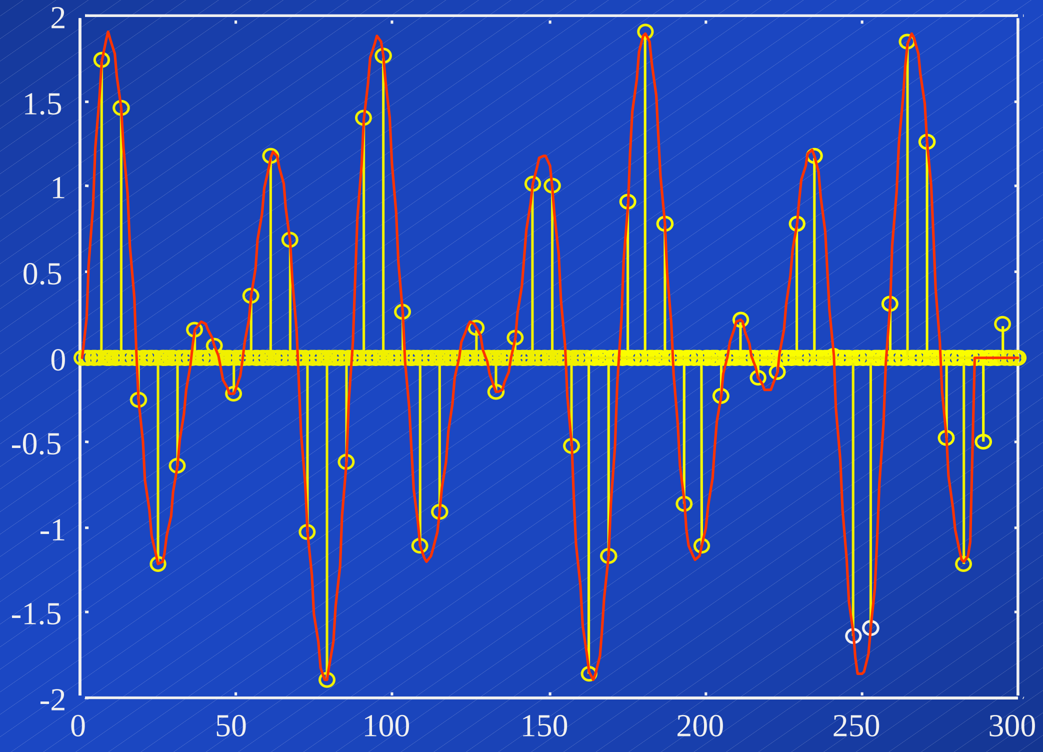


Aplicaciones de Filtros Digitales

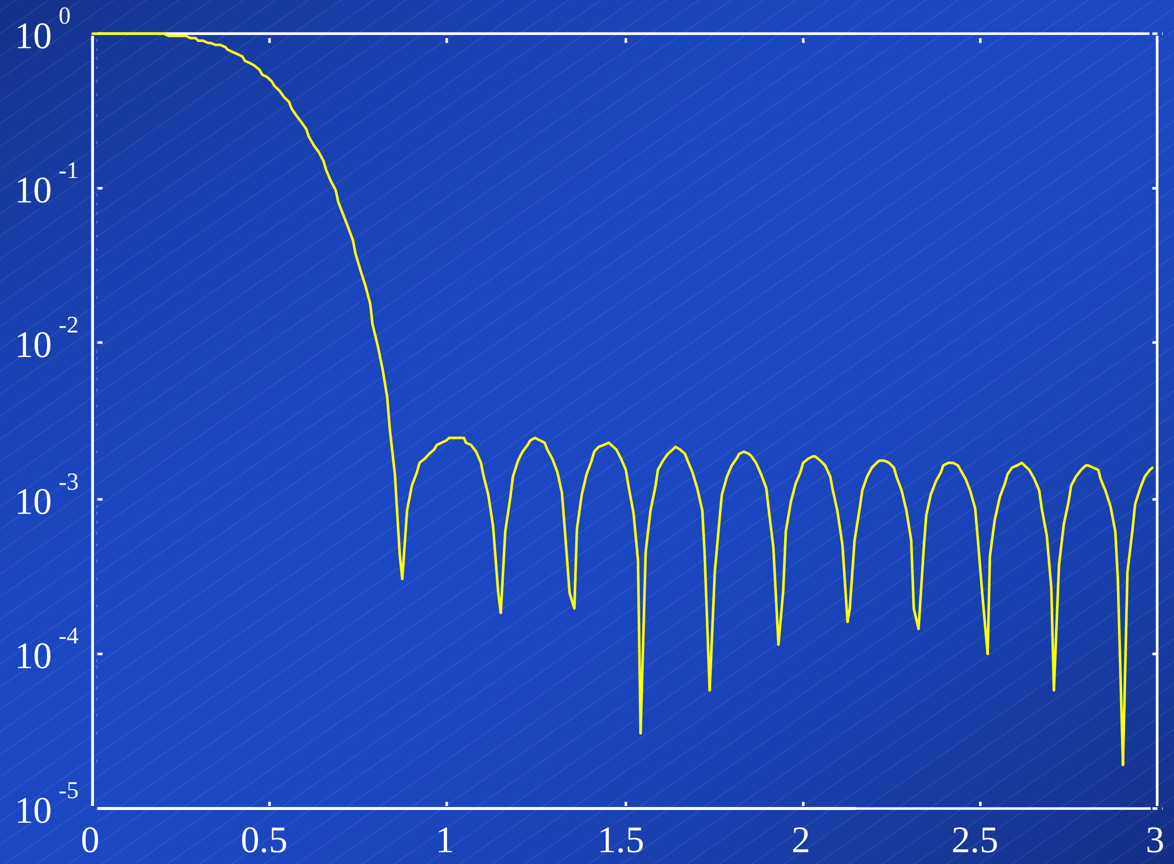
❒ Interpolación y Decimación en MATLAB

```
>> N=50;n=0:N-1;L=6;M=L*N;
>> x = sin(2*pi*0.14*n)+ sin(2*pi*0.21*n);
% Generar la secuencia del up-sampler
>> xu = zeros(1,M);
>> n1 = 1:M;
>> xu([1:L:M]) = x;
>> figure;stem(n,x);
>> figure;stem(n1,xu);hold;
% Frecuencia de corte del filtro pasobajo = pi/6 --> 1/12
>> Nf=30;nf=Nf/2;
>> B = fir1(Nf,1/6);
>> y = filter(6*B,1,xu);
% Desplazar a la izquierda el vector 'y'
>> y(1:M-nf) = y(nf+1:M); y(M-nf+1:M) = zeros(1,nf);
>> plot(n1,y,'r');zoom;
>> [H,F] = freqz(B,1,250,6);
>> figure;semilogy(F,abs(H));zoom;
```

Aplicaciones de Filtros Digitales



Aplicaciones de Filtros Digitales

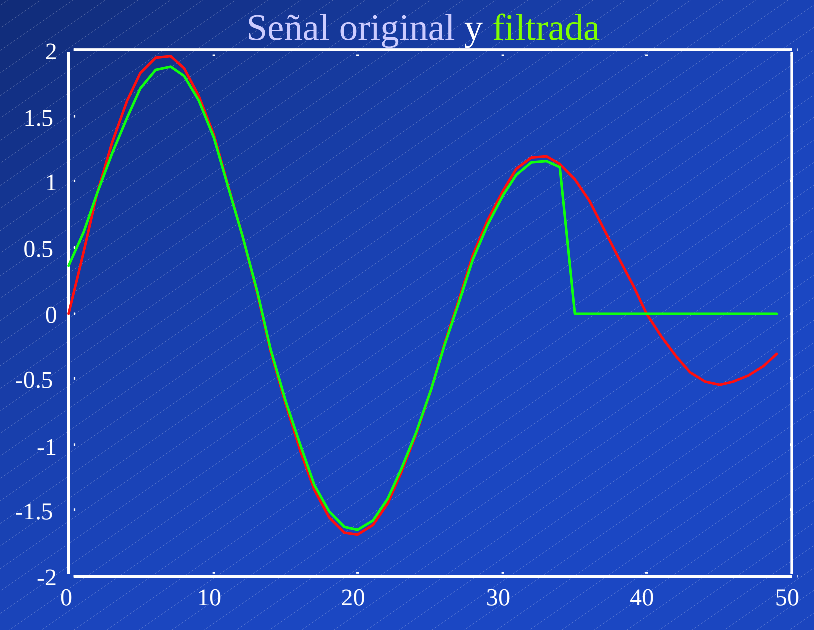


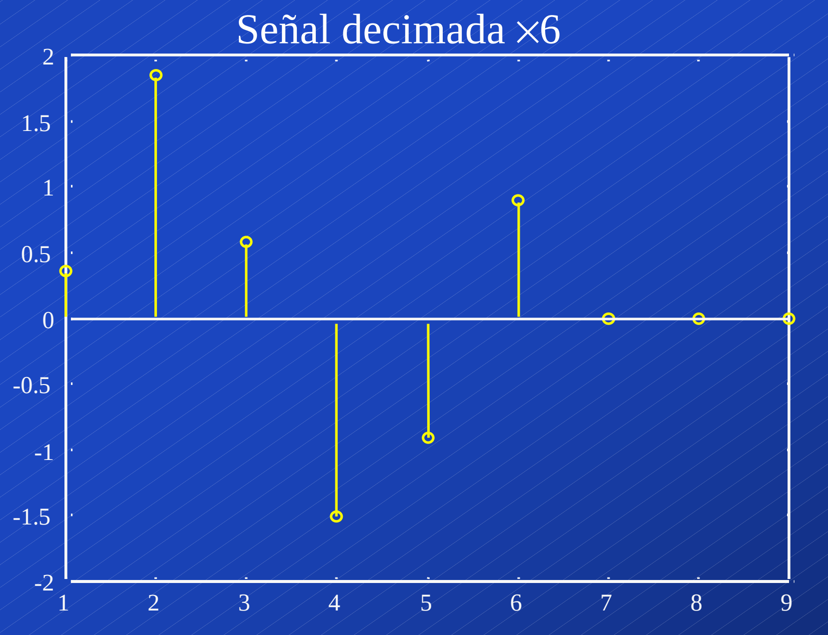
Aplicaciones de Filtros Digitales

Decimación

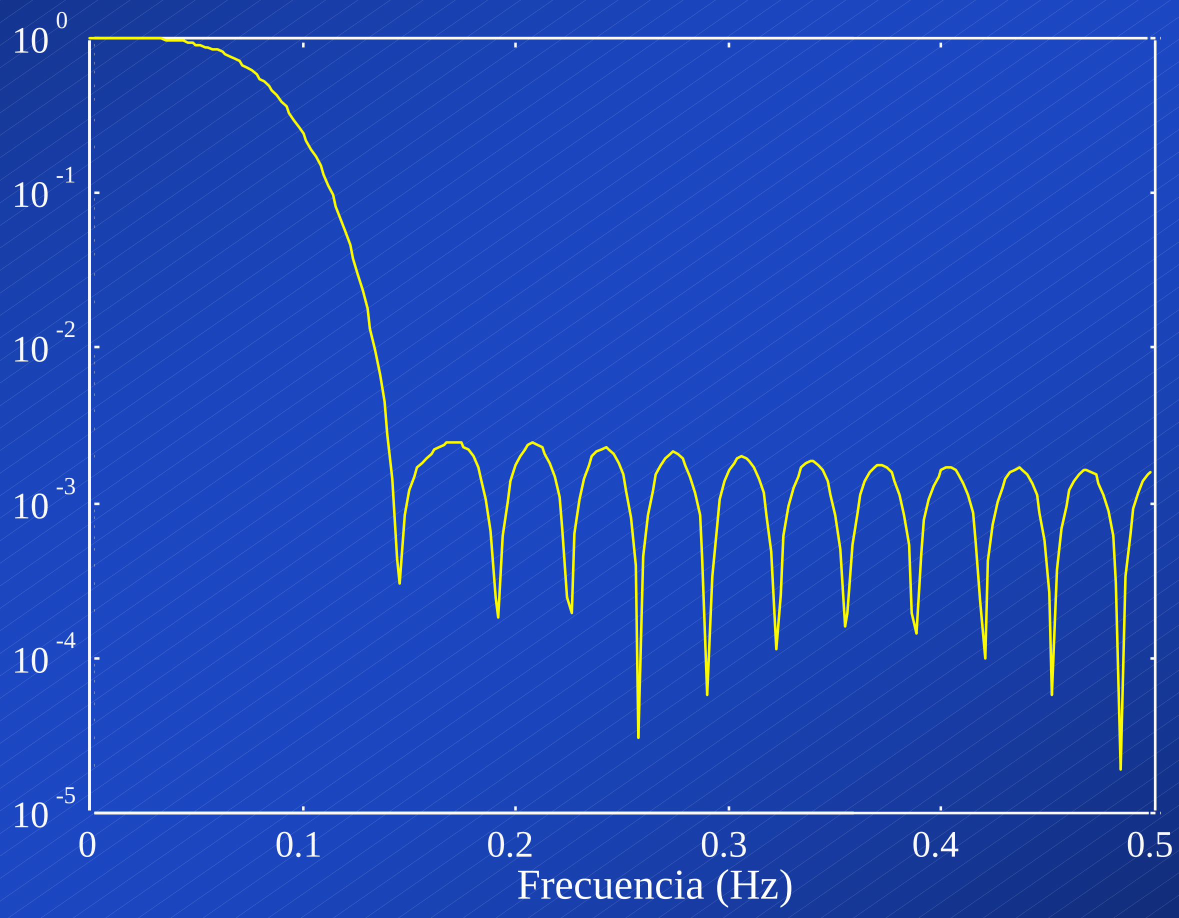
```
>> N=50;n=0:N-1;M=6;Nf=30;nf=Nf/2;
>> x = sin(2*pi*0.042*n) + sin(2*pi*0.033*n);
% Filtro pasobajo frecuencia de corte pi/6 --> 1/12
>> B=fir1(Nf,1/6);
>> [H,F]=freqz(B,1,250,1);
>> xd = filter(B,1,x);
% Eliminar el retraso
>> xd(1:N-nf) = xd(nf+1:N);xd(N-nf+1:N)=zeros(1,nf);
% Generar la secuencia de down-sampler
>> y = xd(1:M:N-1);lxd=length(y);
>> figure;plot(n,x,'r',n,xd,'g');
>> figure;stem([1:lxd],y);
>> figure;semilogy(F,abs(H));
```

Aplicaciones de Filtros Digitales





Aplicaciones de Filtros Digitales

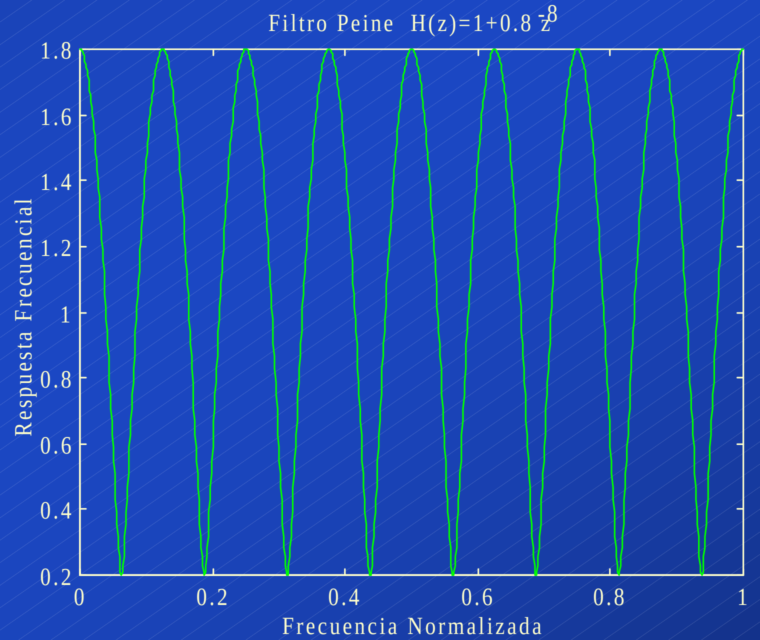


Aplicaciones de Filtros Digitales

- Existen funciones en MATLAB que realizan estas operaciones automáticamente. Son `interp`, `decimate` y `resample`. Ver el Help de MATLAB para más detalles.
- Comb Filters

  Tenemos una señal sonora a la que queremos añadirle ecos. La forma más simple de hacerlo es: $y[n]=x[n]+\alpha\, x[n-R], \quad |\alpha|<1$

  R es el retraso del eco. La función de transferencia es $H(z)=1+\alpha\, z^{-R}$

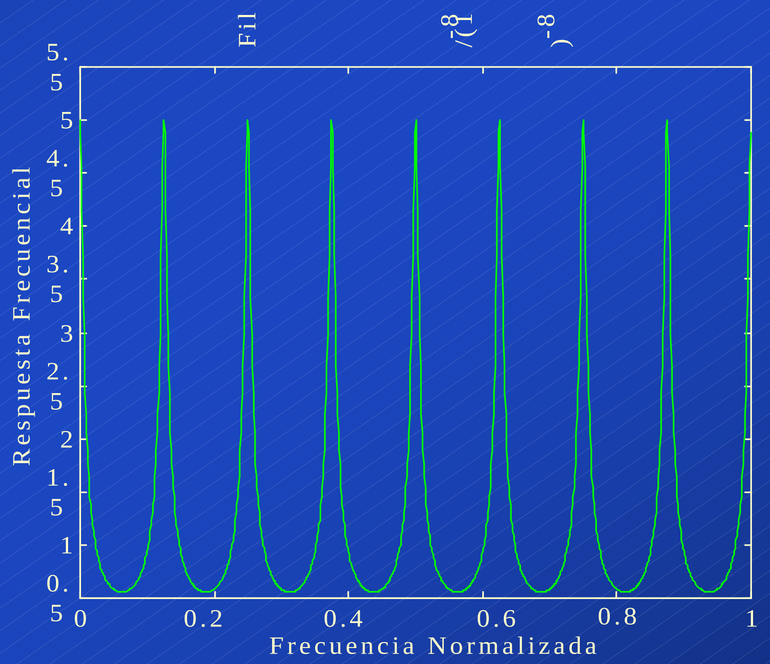


Aplicaciones de Filtros Digitales

Podemos generar N ecos espaciados R periodos de muestreo y con sus amplitudes decayendo exponencialmente, de forma que la función de transferencia es,

$$H(z)=1+\alpha\cdot z^{-R}+\alpha^2\cdot z^{-2R}+\cdots+\alpha^{(N-1)}\cdot z^{-R(N-1)}=\frac{1-\alpha^N\cdot z^{-NR}}{1-\alpha\cdot z^{-R}},\quad |\alpha|<1$$

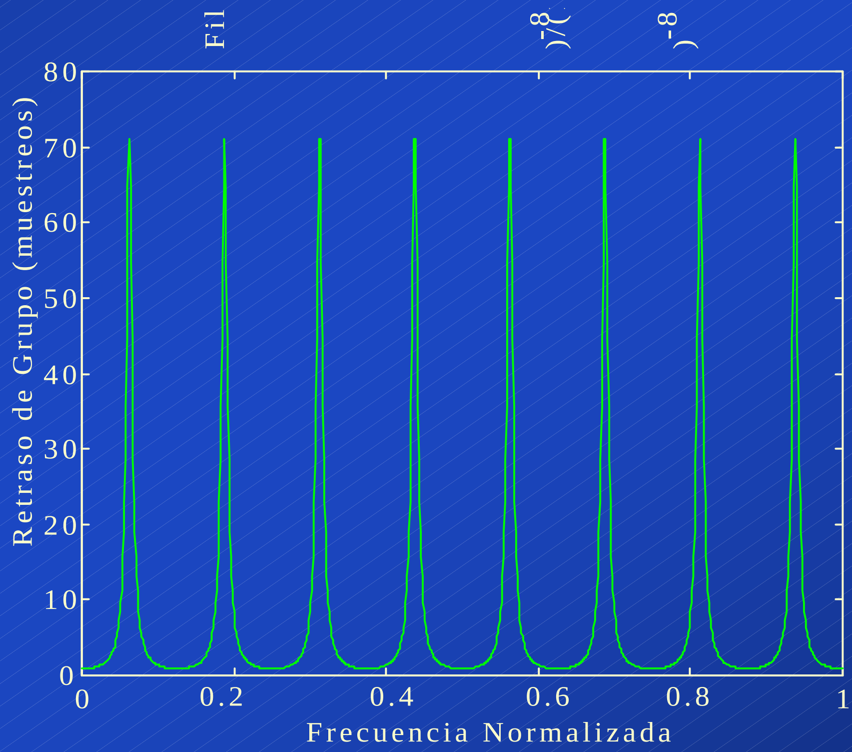
Cuando N tiende a infinito, $$H(z)=\frac{z^{-R}}{1-\alpha\cdot z^{-R}},\qquad |\alpha|<1$$



Aplicaciones de Filtros Digitales

- "All-pass Filters"

  Un caso sencillo de un filtro pasatodo es $H(z)=\dfrac{\alpha+z^{-R}}{1+\alpha\cdot z^{-R}},\quad |\alpha|<1$



Aplicaciones de Filtros Digitales

- "Notch Filters"

  Es un filtro pasabanda cuya función de transferencia es del tipo,

$$H(z) = \frac{1+\alpha}{2} \frac{1-2\beta z^{-1} + z^{-2}}{1-\beta(1+\alpha)z^{-1} + \alpha z^{-2}}$$

  La frecuencia a la cual la respuesta es cero tiene la siguiente expresión,

$$\omega_0 = \cos^{-1}(\beta)$$

  Y el ancho de frecuencias de corte a 3 dB,

$$\Delta\omega_{3dB} = \cos^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)$$

Aplicaciones de Filtros Digitales