Señales y Sistemas

- Señales y Clasificación
- Sistemas y Clasificación
- Respuesta al impulso de los sistemas

Señales

- El procesamiento de señales es el objeto de la asignatura, así que no vendría mal comentar algunas cosas sobre ellas.
- En primer lugar las señales no tienen gran interés en sí mismas si no nos es posible transmitirlas y recibirlas. Las señales, por tanto, están muy ligadas a la comunicación y su procesamiento es de vital importancia en la llamada era de la información.
- Pero ¿qué es información? La información está asociada de alguna manera al conocimiento o al significado que proporciona esa información. Las señales obviamente llevan consigo la información.
- Sin embargo, Shannon desarrolló otro concepto de información desprovisto del significado que pueda extraerse o del conocimiento que pueda derivarse de esa información.
- Supongamos que una fuente de información envía una serie de símbolos a un receptor. Llamamos *X* al conjunto de símbolos formado por :

$$X=\{a_1 , a_2 , a_3 ,..., a_N\}$$

Señales

- Los símbolos se envían a un receptor de acuerdo con sus probabilidades respectivas y hacemos la suposición (no precisamente acertada), de que las probabilidades son independientes unos de otras (fuente de información sin memoria) . Es decir, envíar un símbolo a_i no cambia la probabilidad de enviar el símbolo a_j a continuación. Sabemos que, en general, esto no es cierto ya que por ejemplo si envíamos el caracter "q", la probabilidad de que el siguiente símbolo sea el caracter "u" aumenta.
- Cada uno de los símbolos a_i tiene una probabilidad de ocurrir p_j.
- Los símbolos pueden ser caracteres del alfabeto, números, bits, puntos, rayas, etc.
- Shannon defiende que en el caso de una fuente de información sin memoria, la información proporcionada por el símbolo a_i depende depende únicamente de su probabilidad p_i. Y define que la información del símbolo a_i es $I(p_i)=-log\ p_i$. Si se toma el 2 como base del logaritmo la unidad de información se denomina bit.
- Se observa que la información es una función decreciente de la probabilidad, lo que implica que un símbolo proporciona más infomación cuanta más incertidumbre (menos probabilidad) tenga.

Señales

- El contenido total de información *H(X)* proporcionado por una fuente de información sin memoria de un conjunto *X* de símbolos será la suma ponderadas de las informaciones de cada símbolo:

$$H(X)=\sum_{i=1}^{N} p_i\, I_i \;=-\sum_{i=1}^{N} p_i\,\log p_i$$

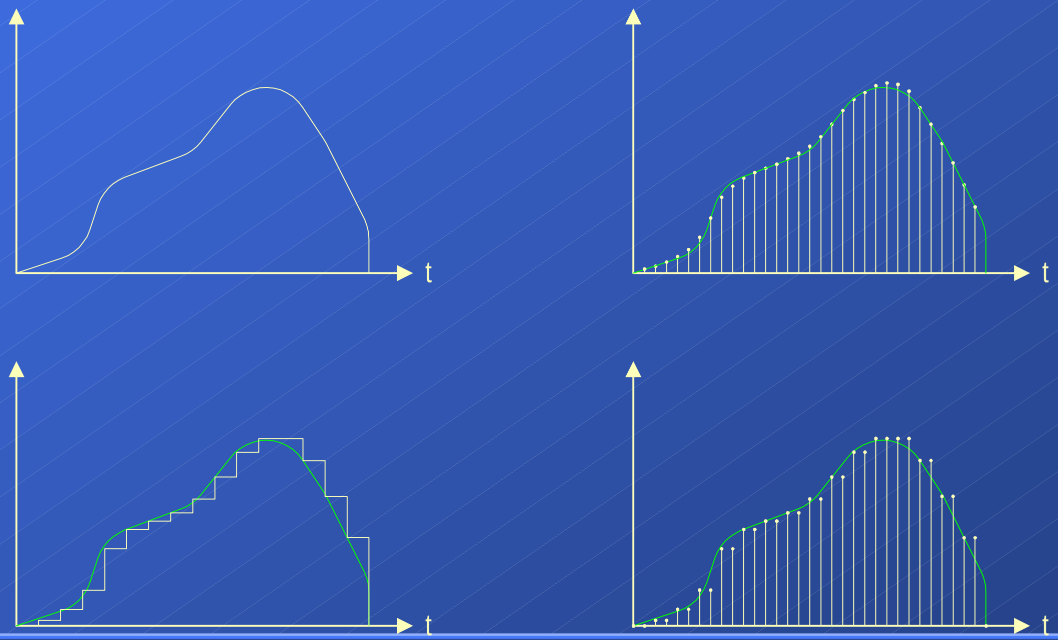
- A este valor, que representa la información ofrecida por una fuente, Shannon le quiso llamar entropía, pero fue convencido por colegas para llamarle información. El nombre entropía no era descabellado ya que al igual que en la entropía termodinámica (que crecía a medida que aumentaba el desorden), aquí la información aumenta a medida que aumenta la incertidumbre sobre lo que recibimos.
- Una vez fundamentada su teoría, Shannon fue más allá y dedujo que el valor *H(X)* era también el número mínimo de bits por símbolo que pueden utilizarse para enviar información con los símbolos de *X* y que la probabilidad de error en la decodificación sea despreciable. De esta forma sentó los límites teóricos de la compresión de señales. La mención a los límites teóricos se hace porque Shannon no se preocupa del algoritmo decodificador de símbolos, que en el caso de utilizar un número de bits *H(X)* será muy complejo.

Señales

- En un caso real, el límite en el número de bits por símbolo vendrá impuesto por la complejidad del algoritmo (y la capacidad de procesamiento disponible) y no por el valor *H(X)*. De ahí que se hable de límite teórico.
- Las señales con las que vamos a tratar son lógicamente señales eléctricas, pero eso no las hace diferentes de los símbolos de los que hemos estado hablando hasta ahora. De hecho, los símbolos son ahora, para nosotros, señales eléctricas.

Señales

- Trataremos con 4 tipos de señales:
  - Analógicas, *x(t)* : Amplitud y Tiempo continuos.
  - Muestreadas, $x_s[n]$: Tiempo Discreto, Amplitud continua.
  - Cuantizada, $x_Q(t)$: Tiempo Continuo, Amplitud discreta.
  - Digital, $x_Q[n]$: Tiempo y Amplitud discretos.



Señales

- Clasificación de señales basada en su duración:
  - Causales: Son 0 para $t<0$. Se definen sólo para el eje positivo de t.
  - Anticausales: Son 0 para $t>0$. Se definen sólo para el eje negativo de t.
  - No causales: Se definen para ambos ejes de t.
  - Continuas: Se definen para todo tiempo t.
  - Periódicas: $x_p(t) = x_p(t \pm nT)$, donde T es el periodo y n es un entero.
- Clasificación de señales basadas en simetrías:
  - Simetría Par: $x(t) = x(-t)$
  - Simetría Impar: $x(t) = -x(-t)$

  Una señal no simétrica puede siempre expresarse como la suma de una función par $x_e(t)$ y una función impar $x_o(t)$:

$$x_e(t) = (x(t)+x(-t))/2$$

$$x_o(t) = (x(t)-x(-t))/2$$

Señales

- Clasificación de señales basada en Energía y Potencia:
  - Energía de una señal : $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$
  - Potencia de una señal : $P_x = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$
  - Una señal se dice que es de energía si E_x es finito, lo que implica que P_x es 0. Ej. Pulsos limitados en el tiempo.
  - Una señal se dice que es de potencia si P_x es finito, lo que implica que E_x es infinito. Ej. Una señal periódica.

Señales

- Catálogo de algunas señales:
  - Escalón unidad : *u(t)*
  - Rampa : *r(t)=t u(t)*
  - Pulso : *u(t+1/2)-u(t-1/2)*
  - Triangular : *tri(t)=r(t+1)-2r(t)+r(t-1)*
  - Sinc : $\operatorname{sinc}(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$
  - Impulso: También llamada función delta o función de Dirac:

$$\delta(t)=0, t\neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)d\tau=1$$

Señales

- Algunas propiedades importantes del impulso:

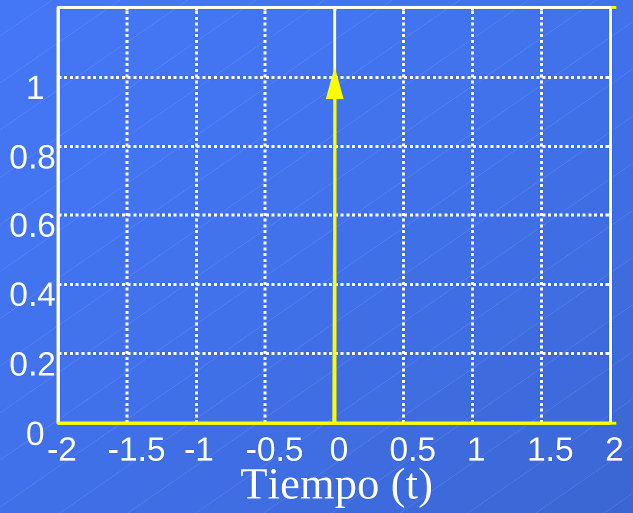
$$\delta[\alpha(t-\beta)] = \left|\frac{1}{\alpha}\right| \cdot \delta(t-\beta)$$

$$x(t) \cdot \delta(t-\alpha) = x(\alpha) \cdot \delta(t-\alpha)$$

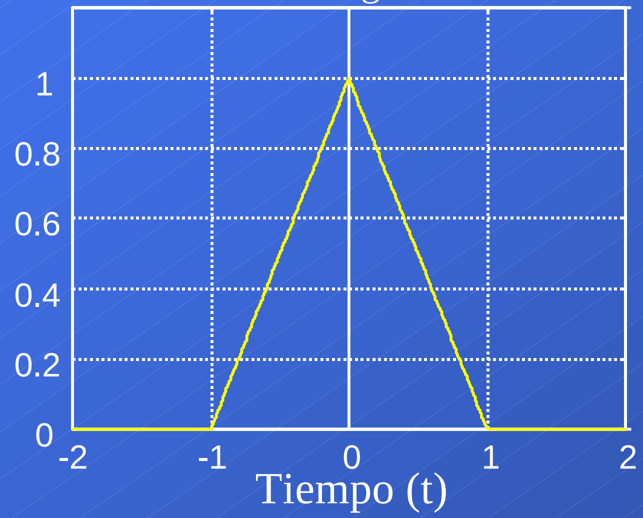
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t-\alpha) \cdot dt = x(\alpha)$$

Señales

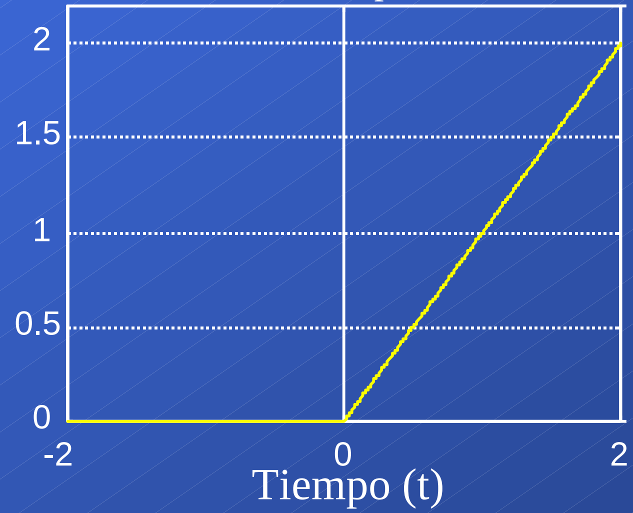
Función delta de Dirac



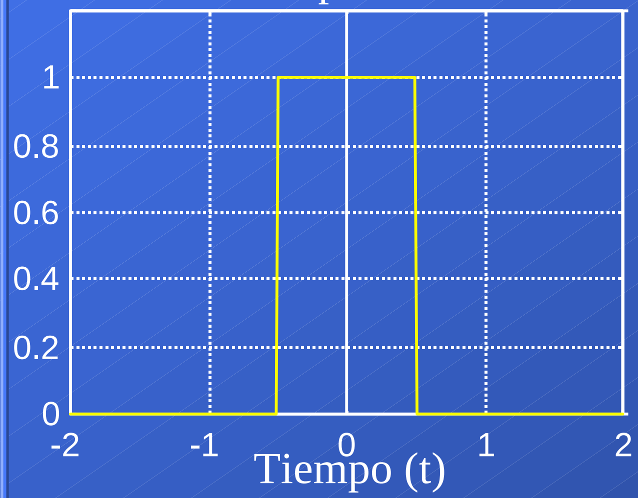
Función triangular unidad



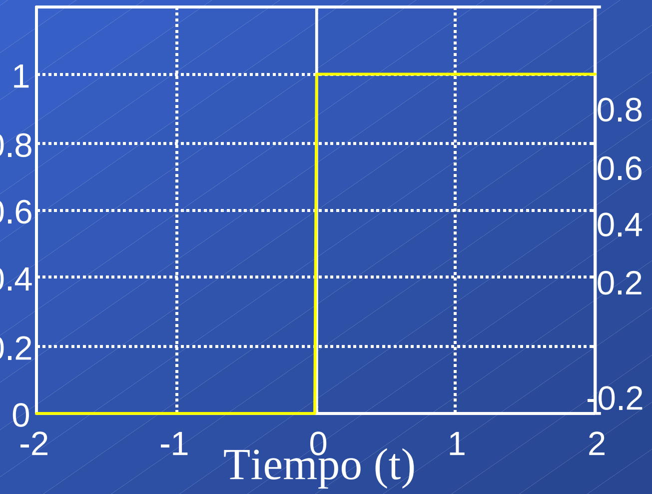
Función rampa unidad



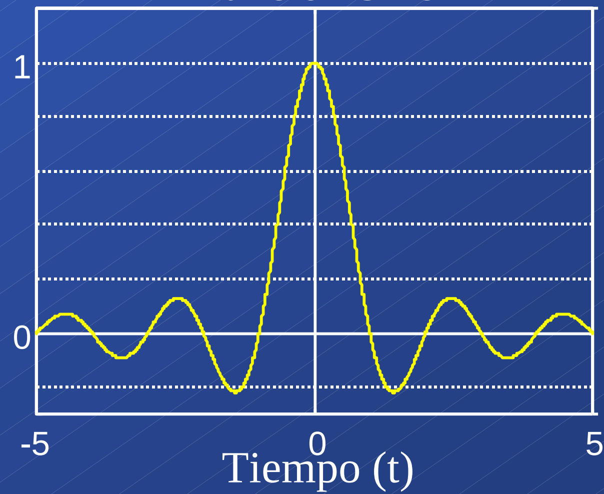
Función pulso unidad



Función escalón unidad



Función Sinc



Señales

- Operaciones con señales:
  - Desplazamiento en el tiempo: $x(t-2)$, desplazamiento a la derecha.
  - Compresión del tiempo: $x(2t)$
  - Dilatación del tiempo: $x(t/2)$
  - Reflexión: $x(-t)$

Señales en MATLAB

- Algunas señales en MATLAB

```
>> y = diric(x,N)
```

La función de Dirichlet se define de la siguiente forma:

$$D(x) = \frac{\sin(Nx/2)}{N\sin(x/2)}$$

Los argumentos de entrada es un vector x en cuyos puntos queremos calcular la función de Dirichlet y el parámetro N, que es el número de máximos de la función en el intervalo (0-2π).

```
>> y = sawtooth(x,width)
```

Genera una señal en diente de sierra con periodo 2π para los elementos del vector x. El parámetro "width" es un escalar entre 0 y 1, y describe la fracción del periodo 2π en el que ocurre el máximo.

```
>> y = sinc(x)
```

La función sinc(x)=sin(πx)/(πx).

```
>> y = square(x,duty)
```

Genera una onda cuadrada de periodo 2π con un duty cycle dado. El parámetro "duty" es el porcentaje del periodo en el cual la señal es positiva.

Sistemas

- Un sistema físico es un conjunto de dispositivos conectados entre sí, cuyo funcionamiento está sujeto a leyes físicas. Desde nuestro punto de vista, un sistema es un procesador de señales.
- La señal o señales a ser procesadas forman la *excitación* o *entrada* del sistema. La señal procesada es la *respuesta* o *salida* del sistema.
- El *análisis de sistemas* implica el estudio de la respuesta del sistema a entradas conocidas.
- La *síntesis de sistemas* se realiza especificando las salidas que deseamos para una entradas dadas y estudiando que sistema es el más adecuado (*Identificación de sistemas)*.

Sistemas

- La representación normal de un sistema (tiempo continuo) se realiza normalmente a través de ecuaciones diferenciales. Se relacionan la salida *y(t)* y la entrada *x(t)* mediante constantes, parámetros y variables independientes (tiempo):

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x$$

- Clasificación de los sistemas:
  - Lineales: Los coeficientes no dependen de x ó y. No hay términos constantes.
  - Nolineales: Los coeficientes dependen de x ó y. Hay términos constantes.
  - Invariante en el tiempo: Los coeficientes no dependen de t.
  - Variante en el tiempo: Los coeficientes son funciones explícitas de t.

Sistemas

- A los sistemas lineales se les puede aplicar el principio de superposición:
  - La respuesta de un sistema a una señal de entrada $x(t)$ formada por la suma de dos o más señales ($x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t)$) es igual a la suma de las respuestas del sistema a cada una de las señales ($y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \ldots + y_n(t)$).
  - La respuesta de un sistema a una señal $Kx(t)$ es igual a K veces la respuesta a $x(t)$.
- Un sistema es invariante en el tiempo cuando la respuesta $y(t)$ depende sólo de la forma de la entrada $x(t)$ y no del tiempo en que se aplica. Matemáticamente:
  - Si $L\{x(t)\} = y(t)$, entonces $L\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$, donde $L\{\}$ es un operador matemático que representa el sistema físico en cuestión.

Sistemas

- Los sistemas que veremos en esta asignatura son del tipo lineal invariante en el tiempo (*LTI*).
- Respuesta al impulso de un sistema: Se representa por *h(t)* y es la respuesta de un sistema *LTI* a un impulso unidad $\delta(t)$.
- La respuesta al impulso nos proporciona la base para estudiar la respuesta a cualquier tipo de entrada. Por ello, se le llama también función de transferencia del sistema.
- Las mismas conclusiones acerca de los sistemas pueden obtenerse en caso de que el sistema sea digital. Aquí las señales vienen dadas por secuencias y la ecuación del sistema por ecuaciones diferencia.

$$y[n]+A_1 y[n-1]+A_2 y[n-2]+\cdots+A_N y[n-N]$$
$$=B_0 x[n]+B_1 x[n-1]+\cdots+B_M x[n-M]$$